# 高等数学例题与习题

## （下册）

马　倩　金凌辉　主编

李　霞　孙晓梅　熊　萍　副主编

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书与同济第六版《高等数学》相配套，分为上、下两册。下册共 5 章，分别为：空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每章首先理清教材的主要内容和基本要求，然后辅以典型例题讲解和释疑解难，最后通过练习题来巩固。本书还特别增加了考研真题的“讲”和“练”，让学生为考研打好基础。

本书可作为高等院校开设高等数学的各专业学生的学习辅导教材，也可作为考研学生的高等数学辅导书。



**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学例题与习题．下册 / 马倩，金凌辉主编．— 北京：电子工业出版社，2014.3

ISBN 978-7-121-22465-2

I．①高…　II．①马…　②金…　III．①高等数学－高等学校－习题集　IV．①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 025896 号

策划编辑：王二华
责任编辑：郝黎明
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：17.25　字数：441.6 千字
版　　次：2014 年 3 月第 1 版
印　　次：2016 年 2 月第 2 次印刷
定　　价：35.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

# 前　　言

高等数学是高等理工科院校的一门重要基础理论课，也是硕士研究生入学考试的重要部分。习题课是复习巩固基本概念、加深理解基本理论、提高学生运算和论证能力的重要环节，为此，我们结合教学中的实践经验，编写了此书。

本书是根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》的精神，并按照同济大学应用数学系主编的《高等数学》（第六版 下册）的章节顺序编写而成，读者也可将此书与其他《高等数学》教材配合使用。全书共 5 章，每章由“基本要求”、“主要内容”、“典型例题”、“释疑解难”、“部分习题解答”、“练习题”、“考研真题”组成。

在“基本要求”中，向读者提出本次课要达到的要求；“主要内容”则扼要概括了有关定义、定理、公式等，条理清晰，重点突出；“典型例题”部分着重分析解题思路，引导学生思考，并加以评注，开拓思路，达到举一反三的效果；“释疑解难”采用问答的形式，指明概念中容易误解的疑点，帮助学生辨析在学习中常见的一些似是疑非的难点；“部分习题解答”针对课后习题中一些较难的题目给出解答过程；“练习题”附有答案，可供读者自我检查；“考研真题”将近几年的硕士研究生入学考试题编入各讲，希望通过对此类题目的分析，能够让读者对研究生入学考试的要求、命题的基本思路有一个基本的了解，并为以后考研打好基础。

本书可作为高等理工科院校的习题课教材，还可作为自学高等数学，特别是准备报考硕士研究生的读者复习参考书。

本书由武汉科技大学城市学院规划，旨在提高学生学习高等数学的兴趣，以及为考研数学奠定良好基础。本书由马倩、金凌辉担任主编，李霞、孙晓梅、熊萍担任副主编。具体分工如下：第 8 章由金凌辉编写；第 9 章由马倩编写；第 10 章由李霞编写；第 11 章由孙晓梅编写；第 12 章由熊萍编写，全书由马倩统稿。

武汉科技大学城市学院的陈建勋院长、王良刚部长对本书的编写提出了许多宝贵意见。电子工业出版社对本书的编审、出版做了大量工作，在此一并致谢！

由于编者水平有限，时间仓促，书中不足及错漏之处在所难免，望各位专家、同行、读者批评指正。

编　　者

# 目　　录

# 第 8 章　空间解析几何与向量代数

## 8.1　向 量 代 数

### 8.1.1　基本要求

1．理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

2．掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件.

3．理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

### 8.1.2　基本内容

#### 1．向量的基本概念

**向量的定义：** 既有大小又有方向的量称为向量（矢量），通常记为 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ .

**向量的模：** 向量的大小称为向量的模，记为$|\boldsymbol{a}|$或$|\overrightarrow{AB}|$.

**单位向量：** 模等于 1 的向量叫做单位向量.

**零向量：** 模等于 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合，它的方向可以看作是任意的.

**空间直角坐标系：** 在空间取定一点 $O$ 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 $O$ 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 $x$ 轴（横轴）、$y$ 轴（纵轴）、$z$ 轴（竖轴），统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系，称为 $Oxyz$ 坐标系.

**向量的坐标表达式：** 设 $x,y,z$ 分别为向量 $\boldsymbol{r}$ 在三个坐标轴上的投影，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ . 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$、$y\boldsymbol{j}$、$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量. 此时 $x,y,z$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标.

**向量的方向角、方向余弦：** 非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角.$\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 的余弦称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦，设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}.$$

#### 2．向量的线性运算

**向量的加法：** 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起

点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ .向量的加法在几何上符合平行四边形法则（或三角形法则）.

**向量的数乘：**向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数$\lambda$的乘积记作$\lambda\boldsymbol{a}$，规定$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，它的模$|\lambda\boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$，它的方向当$\lambda > 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当$\lambda < 0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 当$\lambda = 0$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}| = 0$，即$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的. 特别地，当$\lambda = \pm1$ 时，有 $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}, (-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$.

在空间直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) = (a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k} = (a_x+b_x, a_y+b_y, a_z+b_z).$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}) = (\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

3．向量的数量积与向量积

**向量的数量积：**对于两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的模 $|\boldsymbol{a}|$、$|\boldsymbol{b}|$ 及它们的夹角$\theta$ 的余弦的乘积称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\theta .$$

数量积具有以下性质：

（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

（2）对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；反之，如果 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

**向量的向量积：**设向量 $\boldsymbol{c}$ 是由两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 按下列方式定出：$\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中$\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角. $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.则向量 $\boldsymbol{c}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

向量积具有以下性质：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

（2）对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$; 反之，如果 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

在空间直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z .$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = a_yb_z\boldsymbol{i}+a_zb_x\boldsymbol{j}+a_xb_y\boldsymbol{k}-a_yb_x\boldsymbol{k}-a_xb_z\boldsymbol{j}-a_zb_y\boldsymbol{i}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\,\boldsymbol{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\,\boldsymbol{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\boldsymbol{k}.$$

## 8.1.3 典型例题

**【例 1】** 用向量方法证明，若一个四边形的对角线互相平分，则该四边形为平行四边形.

**证明：**如图 8-1-1 所示，因为平行四边形 $ABCD$ 的对角线互相平分，则有 $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MA}$

由三角形法则有 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$；

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}.$$

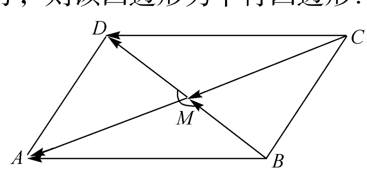


图 8-1-1

所以 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$，即 $BA$ 平行且等于 $CD$，故四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

**评注**：利用向量可以证明中学学过的很多初等几何问题，用向量的方法证明几何问题通常需要先根据所给问题构造向量，再结合平行四边形法则或三角形法则进行证明.

**【例 2】** 求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 共线且满足方程 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

**解**：法一　因为 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以必有 $\lambda\neq 0$，使得

$$\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{a}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda)$$

又因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=4\lambda+\lambda+4\lambda=-18$，所以 $\lambda=-2$，故 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$

法二　由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{x}|\cos\theta=-18$ 且 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线得 $\theta=\pi$，又因为$|\boldsymbol{a}|=3$，所以$|\boldsymbol{x}|=6$，故

$$\boldsymbol{x}=-2\,\boldsymbol{a}=(-4,2,-4)$$

**评注**：证明两个向量共线的方法有：

1. 证明有 $\lambda\neq 0$，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$;
2. 证明两个向量的对应坐标成比例，即 $\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$;
3. 证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

**【例 3】** 求证向量 $\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a})^2}$ 垂直.

**证明**：因为 $\vec{a}\cdot\left[\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a})^2}\right]=\vec{a}\cdot\vec{b}-\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a})^2}=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2}=0$

所以，向量 $\vec{a}$ 和向量 $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{(\vec{a})^2}$ 垂直.

**评注**：证明两个向量垂直的方法有：

1. 证明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;
2. 证明两向量相应坐标乘积为零，即 $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

**【例 4】** 向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 具有相同的模，且两两所成的角相等，若 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的坐标分别为 $(1,1,0)$ 和 $(0,1,1)$，求向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标.

**解**：设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=r$ 且它们两两所成的角相等，设为 $\theta$

因为
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times0+1\times1+0\times1=1$$

于是
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{r^2}$$

设向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标为 $(x,y,z)$

则
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1\cdot x+1\cdot y+0\cdot z=x+y=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=r\cdot r\cdot\frac{1}{r^2}=1 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0\cdot x+1\cdot y+1\cdot z=y+z=|\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{c}}|\cos\theta=r\cdot r\cdot\frac{1}{r^2}=1 \tag{2}$$

$$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$$

所以
$$x^2+y^2+z^2=2 \tag{3}$$

联立（1)、(2)、(3）解得
$$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=1\end{cases} 或 \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\y=\dfrac{4}{3}\\z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$
所以向量 $\boldsymbol{c}$ 的坐标为 $(1,0,1)$ 或 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$.

**评注**：通常涉及向量的模和向量夹角的问题，都可以尝试利用向量的数量积进行求解.

**【例 5】** 设非零向量 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2$，$\overrightarrow{AD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$，求证：$A$、$B$、$C$、$D$ 共面.

**证明**：因为
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}&=[(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)\times(2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2)]\cdot[3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)]\\&=(8\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1)\cdot3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)\\&=18[(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_1-(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_2]\\&=0\end{aligned}$$
所以，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面，即 $A$、$B$、$C$、$D$ 共面.

**评注**：本例提供了一种证明空间中四点共面的方法，证明空间中四点共面可转换为证明由这四点构成的三个向量共面. 其中 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$ 也称为此三个向量的**混合积**，空间中三个非零向量共面的充分必要条件为它们的混合积为零.从几何上看，三个向量的混合积表示的是以此三个向量为邻边构成的平行六面体体积（见下例）.

例 6 已知点 $A(3,6,1)$，$B(2,-4,1)$，$C(0,-2,3)$，$D(-2,0,-3)$，

（1）求以 $AB$，$AC$，$AD$ 为邻边组成的平行六面体的体积.

（2）求三棱锥 $A-BCD$ 的体积.

（3）求 $\Delta BCD$ 的面积.

（4）求点 $A$ 到平面 $BCD$ 的距离.

**解**：由 $A$、$B$、$C$、$D$ 四点的坐标有 $\overrightarrow{AB}=(-1,-10,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,-8,2)$，$\overrightarrow{AD}=(-5,-6,-4)$.

（1）易知以 $AB$，$AC$，$AD$ 为邻边的平行六面体的体积为它们构成的混合积，即
$$V=\begin{vmatrix}-1&-10&0\\-3&-8&2\\-5&-6&-4\end{vmatrix}=-32+100+0-(0-120+12)=176$$
（2）由立体几何的知识可知，四面体 $ABCD$（三棱锥 $A-BCD$）的体积
$$V_{\mathrm{T}}=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}\times176=\frac{88}{3}$$
（3）因为 $\overrightarrow{BC}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,4,-4)$
$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-2&2&2\\-4&4&-4\end{vmatrix}=-16\boldsymbol{i}-16\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}$$

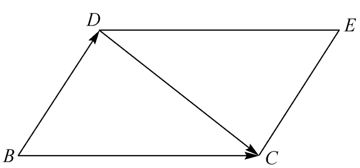


图 8-1-2

所以 $|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-16)^2+(-16)^2}=16\sqrt{2}$，这是平行四边形 $BCED$ 的面积（如图 8-1-2）.

因此 $S_{\Delta BCD}=\dfrac{1}{2}S_{\square BCED}=\dfrac{1}{2}\times16\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

（4）设点 $A$ 到平面 $BCD$ 的距离为 $H$，由立体几何知识可知三棱锥 $A-BCD$ 的体积

$$V_{\mathrm{T}}=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot H$$

所以 $H=\dfrac{3V_{\mathrm{T}}}{S_{\Delta BCD}}=\dfrac{3\cdot\dfrac{88}{3}}{8\sqrt{2}}=\dfrac{11}{\sqrt{2}}=\dfrac{11\sqrt{2}}{2}$

**评注**：本例中利用了向量混合积的几何意义，同时在解题过程中结合了同学们在高中时学过的立体几何知识.

## 8.1.4　疑难释疑

1．向量加法的平行四边形法则与三角形法则各有何特点?

答：当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 该法则称为向量加法的**平行四边形法则**，该法则适合于讨论两个向量作和.

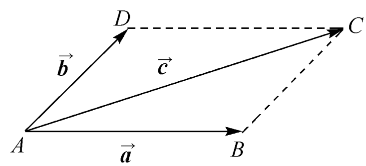



图 8-1-3

若将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点接于向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 即为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 该法则称为向量加法的**三角形法则.**

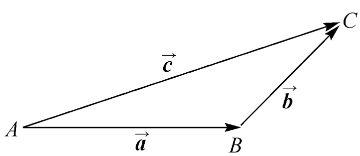



图 8-1-4

三角形法则的好处在于可以推广到多个向量作和，此时只需使前一向量的终点作为下一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$, 再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$.

2．如何定义两个向量的夹角?

答：当把两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放到同一点时，两个向量之间的不超过 π 的夹角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\boldsymbol{a},\hat{\ }\boldsymbol{b})$ 或 $(\boldsymbol{b},\hat{\ }\boldsymbol{a})$. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量，规定它们的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值.类似地，可以规定向量与一轴的夹角或空间两轴的夹角.

3．空间直角坐标系有何特征?

答：空间直角坐标系的三个坐标轴两两垂直，通常三个轴应具有相同的长度单位；在构造坐标系时通常把 $x$ 轴和 $y$ 轴配置在水平面上，而 $z$ 轴则是铅垂线，坐标轴的的正向必须符合右手规则. 在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为**坐标面.** $x$ 轴及 $y$ 轴所确定的坐标面叫做 $xOy$ 面，另两个坐标面是 $yOz$ 面和 $zOx$ 面. 坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如：点 $M$ 在 $yOz$ 面上，则 $x=0$；同理，在 $zOx$ 面上的点，$y=0$；在 $xOy$ 面上的点，$z=0$. 如果点 $M$ 在 $x$ 轴上，则 $y=z=0$；同样在 $y$ 轴上，有 $z=x=0$；在 $z$ 轴上的点，有 $x=y=0$. 如果点 $M$ 为原点，则 $x=y=z=0$.

4．数量积和向量积有何本质的区别?

答：数量积也称为**内积**，通常记为“点乘”. 根据定义，若两个向量作数量积，则它们的

乘积为一个数，这个数的大小由两个向量的模及它们的夹角的余弦决定，例如，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$，则它们数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $|\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ \cos\theta$; 相应的，向量积也称为**外积**，通常记为“叉乘”．若两个向量作向量积，则它们的乘积为一个向量，该向量的模（大小）等于原来两个向量的模与它们夹角正弦的乘积，方向则由右手规则决定．例如 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 则向量 $\boldsymbol{c}$.的模等于 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其中 $\theta$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角，$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面，$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手规则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定.

## 8.1.5　部分习题解答

【习题 8-1】

5．求平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量.

**解：** $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11$，故平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量为

$$\boldsymbol{e}_a=\pm\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\pm\left(\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{-6}{11}\right).$$

18．一向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 $x$ 轴，$y$ 轴和 $z$ 轴上的投影依次为 $4,-4$ 和 $7$．求该向量起点 $A$ 的坐标.

**解：** 设向量的起点 $A$ 的坐标为 $(x,y,z)$，由 $(2-x,-1-y,7-z)=(4,-4,7)$ 可知 $x=-2$，$y=3$，$z=0$．即 $A$ 的坐标为 $(-2,3,0)$．

19．设 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$ 和 $\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 $x$ 轴上的投影及在 $y$ 轴上的分向量.

**解：** $\boldsymbol{a}=4(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k})+3(2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k})-(5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k})=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$，因此向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $x$ 轴上的投影为 13，在 $y$ 轴上的分向量为 $7\boldsymbol{j}$.

【习题 8-2】

2．设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$．

**解：** 由 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$

得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)=-\dfrac{3}{2}$.

8．试用向量证明直径所对的圆周角是直角.

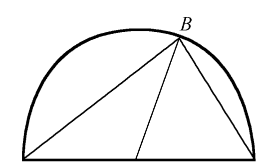



图 8-1-5

**证明：** 如图 8-1-5，因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=|OC|^2-|OB|^2=0\end{aligned}$$

故 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$，即直径所对的圆周角是直角.

12．试用向量证明不等式

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

其中 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3$ 为任意实数，并指出等号成立的条件.

**证明：** 设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$．

由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 知 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，即

$$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

当 $\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时等号成立.

### 8.1.6　练习题

1．填空题

（1）点 $M(x,y,z)$ 关于 $x$ 轴的对称点为 $M_1$________；关于 $xOy$ 平面的对称点为 $M_2$________；关于原点的对称点为 $M_3$________.

（2）平行于 $\boldsymbol{a}=(1, 1, 1)$的单位向量为________；若向量 $\boldsymbol{a}=(\lambda,1,5)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(2,10,50)$ 平行，$\lambda$ 为________.

（3）已知两向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-9\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=$__________，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=$________，$3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 在 $z$ 轴上的投影为________.

2．选择题

（1）向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ＝（　　）.

A．$|\boldsymbol{a}|\ \mathrm{P}rj_b\boldsymbol{a}$　　B．$\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{P}rj_a\boldsymbol{b}$　　C．$|\boldsymbol{a}|\ \mathrm{P}rj_a\boldsymbol{b}$　　D．$|\boldsymbol{b}|\ \mathrm{P}rj_a\boldsymbol{b}$

（2）非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则有（　　）.

A．$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$　　B．$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（$\lambda$ 为实数）　　C．$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$　　D．$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$

（3）设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$ 是（　　）.

A．$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的充要条件　　B．$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件

C．$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 的充要条件　　D．$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$ 的必要但不充分的条件

3．计算及证明题

（1）已知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$，并且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$. 计算 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

（2）已知 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=3$，$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=4$，求 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$.

（3）设点 $O$ 是平面上正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的中心，证明:

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

## 习题答案

1．（1）$(x,-y,-z)$；$(x,y,-z)$；$(-x,-y,-z)$.

（2）$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$；$\dfrac{1}{5}$.

（3）$12\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$；$12\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}+48\boldsymbol{k}$；48

2．（1）C　（2）C　（3）A

3．（1）因为 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$|\boldsymbol{c}|=5$，并且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 反向，因此 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=0$，$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=0$.

（2）易知 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=3$　①　　$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta=4$　②

故由①$^2$+②$^2$ 得 $\left(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\right)^2=25$，所以 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=5$.

（3）因为

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3}=\lambda\overrightarrow{OA_2},$$
$$\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4}=\lambda\overrightarrow{OA_3},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1}=\lambda\overrightarrow{OA_n},$$
$$\overrightarrow{OA_n}+\overrightarrow{OA_2}=\lambda\overrightarrow{OA_1},$$

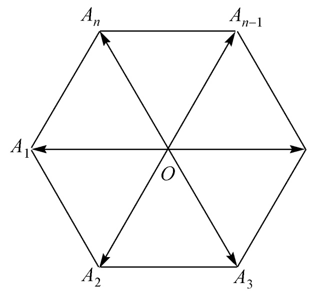


图 8-1-6

所以 $2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$

$=\lambda(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})$,

所以 $$(\lambda-2)(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n})=\vec{0}.$$

显然 $\lambda\neq 2$，即 $\lambda-2\neq 0$.

所以 $$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}.$$

### 8.1.7　考研真题

【例 1】（1995 年数一） 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$.

解：易知 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=0,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=0,\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$，从而由分配律有 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$，又因为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}$，故原式等于 4.

评注：在历年研究生入学考试中，单独考察向量代数的题目较少. 本题主要考察了向量数量积和向量积运算的分配律及相关性质.

## 8.2　空间平面、直线和曲面方程

### 8.2.1　基本要求

1．掌握平面方程（点法式、混合积）和直线方程（点向式、一般式）及其求法.

2．会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题.

3．会求点到直线以及点到平面的距离.

4．了解曲面方程和空间曲线方程的概念.

5．了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6．了解空间曲线的参数方程和一般方程. 了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

### 8.2.2　基本内容

#### 1．曲面方程和空间曲线方程

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作点的几何轨迹. 在这样的意义下，如果曲面 $S$ 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0$$

有下述关系:

（1）曲面 $S$ 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

（2）不在曲面 $S$ 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z) = 0$,

那么，方程 $F(x, y, z) = 0$ 就叫做曲面 $S$ 的方程，而曲面 $S$ 就叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0 \text{ 和 } G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面方程,它们的交线为 $C$. 因为曲线 $C$ 上的任何点的坐标应同时满足这两个方程，所以应满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{1}$$

反过来，如果点 $M$ 不在曲线 $C$ 上，那么它不可能同时在两个曲面上，所以它的坐标不满足方程组.

空间曲线 $C$ 的方程除了一般方程之外，也可以用参数形式表示，只要将 $C$ 上动点的坐标 $x$、$y$、$z$ 表示为参数 $t$ 的函数:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{2}$$

当给定 $t = t_1$ 时,就得到 $C$ 上的一个点$(x_1, y_1, z_1)$; 随着 $t$ 的变动便得曲线 $C$ 上的全部点. 方程组（2）叫做空间曲线的参数方程.

### 2. 平面方程和空间直线方程

**平面的点法式方程：**当平面$\Pi$上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$为已知时,方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0$ 称为平面$\Pi$ 的点法式方程.

**平面的一般方程：**任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D = 0$ 的图形总是一个平面. 方程 $Ax+By+Cz+D=0$ 称为平面的一般方程，其中 $x, y, z$ 的系数就是该平面的一个法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的坐标.

**直线的点向式方程：**当直线 $L$ 上一点 $M_0(x_0, y_0, x_0)$和它的一方向向量 $\boldsymbol{s} = (m, n, p)$为已知时，直线 $L$ 的位置就完全确定了. $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ 就是直线 $L$ 的方程，叫做直线的对称式方程或点向式方程.

**直线的一般方程：**空间直线 $L$ 可以看作是两个平面$\Pi_1$ 和$\Pi_2$ 的交线. 如果两个相交平面$\Pi_1$和$\Pi_2$ 的方程分别为 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0$ 和 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$,方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ 叫做空间直线 $L$ 的一般方程.

**直线的参数方程：**由直线的对称式方程容易导出直线的参数方程. 设 $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p} = t$，得方程组 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$. 此方程组就是直线的参数方程.

3．平面、直线间的夹角及位置关系，点到平面、直线的距离

**平面的夹角公式**：设平面$\Pi_1$和$\Pi_2$的法线向量分别为$\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$和$\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$，则平面$\Pi_1$和$\Pi_2$的夹角$\theta$可由$\cos\theta=|\cos(\boldsymbol{n}_1\hat{,}\ \boldsymbol{n}_2)|=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$来确定.

**平面的位置关系**：平面$\Pi_1$和$\Pi_2$垂直相当于$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$；平面$\Pi_1$和$\Pi_2$平行或重合相当于$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

**直线的夹角公式**：设直线$L_1$和$L_2$的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(m_1, n_1, p_1)$和$\boldsymbol{s}_2=(m_2, n_2, p_2)$，则直线$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$可由$\cos\varphi=|\cos(\boldsymbol{s}_1\hat{,}\ \boldsymbol{s}_2)|=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$来确定.

**直线的位置关系**：设有两直线$L_1$: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$L_2$: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，则

$L_1\perp L_2\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；　$L_1 /\!/ L_2\Leftrightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

**直线与平面的夹角公式**：设直线的方向向量$\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，平面的法线向量为$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，直线与平面的夹角为$\varphi$，则$\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

**直线与平面的位置关系**：设直线的方向向量$\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，平面的法线向量为$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，则直线与平面垂直相当于$\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；直线与平面平行或直线在平面上相当于$Am+Bn+Cp=0$.

**点到平面的距离**：点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到平面$\Pi$的距离为$d=|\overrightarrow{n_0}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}|$，其中$\overrightarrow{n_0}$为平面$\Pi$的单位法向量，$M_0$是$\Pi$上的任一点.

**点到直线的距离**：点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$L$的距离为$d=|\overrightarrow{s_0}\times\overrightarrow{M_0M_1}|$，其中$\overrightarrow{s_0}$为直线$L$上的单位向量，$M_0$是直线$L$上的任一点.

4．常见空间曲面方程

《高等数学》中常用的曲面方程如下表：

| | |
|---|---|
| 椭球面方程 | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，当$a=b$或$b=c$或$c=a$时为旋转椭球面，当$a=b=c$时，为球面方程 |
| 双曲面方程 | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\begin{cases}1, & \text{单叶双曲面}\\ -1, & \text{双叶双曲面}\end{cases}$ |
| 锥面方程 | $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=0,\quad abc\neq 0$ |
| 抛物面方程 | $2z=\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}, \text{椭圆抛物面}\\ \dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}, \text{双曲抛物面}\end{cases}$，其中$pq>0$ |

续表

| | |
|---|---|
| 柱面方程 | $F(x,y)=0$，母线平行于 $z$ 轴的柱面方程<br>$F(y,z)=0$，母线平行于 $x$ 轴的柱面方程<br>$F(x,z)=0$，母线平行于 $y$ 轴的柱面方程 |
| 旋转面方程 | 母线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 绕z轴旋转所得旋转面方程: f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 \\ 绕y轴旋转所得旋转面方程: f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0 \end{cases}$ |

## 8.2.3　典型例题

**【例 1】** 求经过点 $A(3,2,1)$ 和 $B(-1,2,-3)$ 且与坐标平面 $xOz$ 垂直的平面的方程.

**解**：与 $xOz$ 平面垂直的平面平行于 $y$ 轴，方程为

$$Ax+Cz+D=0 \tag{1}$$

把点 $A(3,2,1)$ 和点 $B(-1,2,-3)$ 代入上式得

$$3A+C+D=0 \tag{2}$$

$$-A-3C+D=0 \tag{3}$$

由（2),（3）得　$A=-\dfrac{D}{2},C=\dfrac{D}{2}$

代入（1）得　$-\dfrac{D}{2}x+\dfrac{D}{2}z+D=0$

消去 $D$ 得所求的平面方程为　$x-2-z=0$.

**评注**：本例考察的是平面的位置与平面一般方程的关系．一般地，若平面平行于 $x$ 轴或垂直于 $yOz$ 面，则 $A=0$；若平面平行于 $y$ 轴或垂直于 $xOz$ 面，则 $B=0$；若平面平行于 $z$ 轴或垂直于 $xOy$ 面，则 $C=0$；若平面过原点，则 $D=0$；若平面平行于 $xOy$ 平面，则 $A=B=0$；若平面平行于 $yOz$ 平面，则 $B=C=0$；若平面平行于 $zOx$ 平面，则 $A=C=0$.

**【例 2】** 求到两平面 $\alpha:3x-y+2z-6=0$ 和 $\beta:\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-5}+\dfrac{z}{1}=1$ 距离相等的点的轨迹方程.

**解**：设动点为 $M(x,y,z)$，由点到平面的距离公式得

$$\frac{|3z-y+2z-6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|-5x+2y-10z+10|}{\sqrt{(-5)^2+2^2+(-10)^2}}$$

所以 $3x-y+2z-6=\pm\dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{129}}(-5x+2y-10z+10)$

**评注**：本例考察的是点到平面的距离公式，需要注意的是平面 $\beta$ 的方程为截距式方程，遇到截距式方程一般可先将其化为一般方程或点法式方程后找出法向量，再运用相关公式，下面的例 3 运用的也是类似方法.

**【例 3】** 已知原点到平面 $\alpha$ 的距离为 120，且 $\alpha$ 在三个坐标轴上的截距之比为 $-2:6:5$，求 $\alpha$ 的方程.

**解**：设截距的比例系数为 $k$，则该平面的截距式方程为

$$\frac{x}{-2k}+\frac{y}{6k}+\frac{z}{5k}=1$$

化成一般式为
$$-15x+5y+6z-30k=0$$

又因点 $O(0,0,0)$ 到平面 $\alpha$ 的距离为 120，则有

$$\frac{|-30k|}{\sqrt{(-15)^2+5^2+6^2}}=120$$

求出 $k=\pm4\sqrt{286}$，所以，所求平面方程为 $-15x+5y+6z\pm120\sqrt{286}=0$.

**【例 4】** 求经过点 $P(1,-2,0)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{0}$ 和 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{0}$ 都平行的平面的方程.

**解：** 已知两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{v}_2=(1,-1,0)$，平面与直线平行，则平面的法向量 $\boldsymbol{a}=(A,B,C)$ 与直线垂直

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{v}_1$，有
$$A+B+0=0 \tag{1}$$
由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{v}_2$，有
$$A-B-0=0 \tag{2}$$
联立（1），（2）求得 $A=0,B=0$，只有 $C\neq0$

又因为平面经过点 $P(1,-2,0)$，代入平面一般方程得

$$0\times1+0\times(-2)+C\times0+D=0$$

所以 $D=0$，故所求平面方程 $Cz=0$，即 $z=0$，也就是 $xOy$ 平面.

**评注：** 本例的解答过程中，如何将空间直线和平面的关系转换为它们的方向向量和法向量的关系是关键. 而向量之间的关系，则可以利用上一节向量代数的相关知识进行处理.

**【例 5】** 求通过点 $P(1,0,-2)$，而与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行且与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ 相交的直线的方程.

**解：** 设所求直线的方向向量为 $\boldsymbol{v}=(m,n,p)$，直线与平面 $3x-y+2z-1=0$ 平行，则 $\boldsymbol{v}$ 与该平面的法向量垂直，故有

$$3m-n+2p=0 \tag{1}$$

又因直线与直线 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$ 相交，即共面，则有

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 4 & -2 & 1 \\ 1-1 & 3-0 & 0+2 \end{vmatrix}=0$$

所以
$$-7m-8n+12p=0 \tag{2}$$

由（1），（2）得

$$\frac{m}{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -8 & 12 \end{vmatrix}}=\frac{n}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 12 & -7 \end{vmatrix}}=\frac{p}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -7 & -8 \end{vmatrix}}，\text{即}\ \frac{m}{4}=\frac{n}{-50}=\frac{p}{-31}$$

取 $m=4$，$n=-50$，$p=-31$，得所求的直线方程为

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-50}=\frac{z+2}{-31}$$

**评注**：本例的关键在于求出所求直线的方向向量，而在求解过程中除了运用了向量垂直的内积关系外，还运用了三个向量共面的充要条件．将两直线相交转换为三个向量共面，是处理直线相交的问题的一种常用手法．

**【例 6】** 一动点 $P$ 到定点 $A(-4,0,0)$ 的距离是它到 $B(2,0,0)$ 的距离的两倍，求该动点的轨迹方程．

**解**：设动点 $P$ 的坐标为 $P(x,y,z)$，依题意，

$$\sqrt{(x+4)^2+y^2+z^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2+z^2}$$

化简得
$$x^2+y^2+z^2-8x=0.$$

**评注**：运用两点间距离公式求动点轨迹是一种典型的方法，同学们可以用截痕法研究一下该动点轨迹的方程，看看这是一个什么曲面．

**【例 7】** 求母线平行 $z$ 轴,并以直线 $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ 为中心轴的圆柱面的方程.

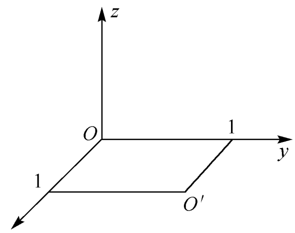


图 8-2-1

**解**：如右图 8-2-1 所示,圆柱面在 $xOy$ 平面上投影的圆心坐标为 $(1,1)$，半径为 $\sqrt{2}$，所以所求圆柱面方程为

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

**评注**：一般地，只含 $x$、$y$ 而缺 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$，在空间直角坐标系中表示母线平行于 $z$ 轴的柱面，其准线是 $xOy$ 面上的曲线 $C$: $F(x,y)=0$. 因此本例关键在于根据题意找出 $xOy$ 面上的曲线 $C$. 类似的题目还有下面的例8.

**【例 8】** 求母线平行 $z$ 轴且经过点 $A(,4,2,2)$以及$B(6,-3,7)$ 的圆柱面的方程.

**解**：设所求柱面方程为
$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2 \tag{1}$$

因为点 $A(,4,2,2)$ , $B(6,-3,7)$ 在柱面上，则有

$$(4-a)^2+(2-b)^2=R^2 \tag{2}$$

$$(6-a)^2+(-3-b)^2=R^2 \tag{3}$$

则
$$(a-0)^2+(b-0)^2=R^2 \tag{4}$$

联立（2）,（3）,（4）求出 $a=\dfrac{25}{8}$，$b=-\dfrac{5}{4}$，$R^2=\dfrac{225}{64}$

代入（1）式得所求的柱面方程为

$$\left(x-\frac{25}{8}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{225}{64}.$$

**【例 9】** 根据 $k$ 的不同取值，说明 $(9-k)x^2+(4-k)y^2+(1-k)z^2=1$ 表示的各是什么图形.

**解**：方程 $(9-k)x^2+(4-k)y^2+(1-k)z^2=1$　（1）

① $k>9$ 时,（1）式不成立，不表示任何图形；

② $4<k<9$ 时,（1）式变为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，表示双叶双曲线；

③ $1<k<4$ 时，（1）式变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，表示单叶双曲线；

④ $k<1$ 时，（1）式变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，表示椭球面；

⑤ $k=1$ 时，（1）式变为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，表示母线平行于 $z$ 轴的椭圆柱面；

⑥ $k=4$ 时，（1）式变为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$，表示双曲柱面；

⑦ $k=9$ 时，（1）式变为 $-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，不表示任何图形.

**评注：**一般地，我们把三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面. 把平面叫做一次曲面. 怎样了解三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 所表示的曲面的形状呢？除了熟悉课本上所介绍的常见二次曲面的方程特点外，同学们还应学会运用截痕法进行分析.

**【例 10】** 求曲线 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 对 $xOy$ 面的投影柱面和在 $xOy$ 面上的投影曲线方程.

**解：**由 $\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$ 消去 $z$，得曲线关于 $xOy$ 面的投影柱面方程为 $x^2+y^2=1$，于是得到曲线在 $xOy$ 面上的投影曲线方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$.

**评注：**本例给出了求空间曲线在坐标平面投影的典型方法. 在后面学习二重积分时，有时需要根据空间立体的方程去确定积分区域，而积分区域的边界，实际上就是空间曲线在坐标平面上的投影. 因此，同学们应掌握好这个方法.

## 8.2.4 疑难释疑

1．平面方程有哪些形式？相互间如何转换？

答：平面方程的形式包括点法式、一般式、截距式，三点式等. 若知道平面上任一点 $M_0$ 的坐标 $(x_0, y_0, z_0)$ 和它的一个法线向量 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$，即可得到平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. 将平面的点法式方程展开，即为平面的一般方程. 若平面在三个坐标轴上的截距分别为 $a,b,c(a,b,c\neq 0)$，则平面的截距式方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，截距式方程消掉分母后便可化为一般方程. 由于三点可以确定一张平面，因此若知道平面上不共线的三点坐标 $(x_1,y_1,z_1)$、$(x_2,y_2,z_2)$、$(x_3,y_3,z_3)$，则由三个向量共面的充分条件便可得到平面的三点式方程

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

将此行列式展开，便可化为一般方程.

2．空间直线的方程有哪些形式？相互间如何转换？

答：空间直线的方程包括点向式、参数式、两点式、一般方程等. 若知道直线上任一点

$M_0$ 的坐标$(x_0, y_0, z_0)$和它的方向向量 $\boldsymbol{s}=(m, n, p)$，则可得到它的点向式方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. 若令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则可得到直线的参数方程 $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$. 由于两点可以确定一条直线，所以若知道直线上两点的坐标 $(x_1,y_1,z_1)$、$(x_2,y_2,z_2)$，由两个向量共线的充要条件可得到平面的两点式方程 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$. 空间直线还可以看作是空间中两张不平行的平面的交线，因此它的一般方程为 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. 将两平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ 作向量积，便可得到直线的方向向量，从而可化为点向式方程.

3．如何确定旋转曲面的方程？

答：确定旋转曲面方程，需要知道它的母线方程以及旋转轴. 比如已知 $yOz$ 坐标面上曲线 $C$ 的方程为 $f(y, z)=0$，把这曲线绕某一坐标轴旋转一周，就得到一个以该坐标轴为旋转轴的旋转曲面. 一般地，若曲线绕 $z$ 轴旋转，则在曲线 $C$ 的方程 $f(y, z)=0$ 中保持 $z$ 不变，将 $y$ 改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$，便可得到旋转曲面的方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$. 类似，若曲线绕 $y$ 轴旋转，则在曲线 $C$ 的方程 $f(y, z)=0$ 中保持 $y$ 不变，将 $z$ 改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，便可得到旋转曲面的方程为 $f(y,\ \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

4．柱面方程有何特点？柱面方程是否一定为不完全的三元方程？

答：一般而言，缺少变量 $z$ 的方程 $F(x,y)=0$（称为不完全的三元方程）表示母线平行于 $z$ 轴的柱面. 类似地，$G(y,z)=0$ 表示的是母线平行于 $x$ 轴的柱面；$H(x,z)=0$ 表示母线平行于 $y$ 轴的柱面. 但是，当柱面的母线不平行于坐标轴时，柱面方程就是完全的三元方程. 例如方程 $x+y+z=0$ 表示的是一张平面，同时也可以认为是一种特殊的柱面，它是完全的三元方程.

5．方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 一定表示空间曲线吗？

答：不一定. 只有当 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 为曲面方程且它们表示的曲面相交时，方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 才表示空间曲线. 例如方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+y^2+z^2-4=0 \end{cases}$ 所表示的是以原点为球心，半径分别为 1 和 2 的两个球面，但它们并不相交，因此该方程组不表示空间曲线.

## 8.2.5　部分习题解答

【习题 8-3】

9．指出下列方程在平面解析几何中和在空间解析几何中分别表示什么图形：

（1）$x=2$　（2）$y=x+1$　（3）$x^2+y^2=4$　（4）$x^2-y^2=1$

**解**：（1）方程 $x=2$ 在平面解析几何中表示直线，在空间解析几何中表示平面.

（2）方程 $y=x+1$ 在平面解析几何中表示直线，在空间解析几何中表示平面.

（3）方程 $x^2+y^2=4$ 在平面解析几何中表示圆，在空间解析几何中表示以 $xOy$ 平面上的圆 $x^2+y^2=4$ 为准线，母线平行于 $z$ 轴的圆柱面.

（4）方程 $x^2-y^2=1$ 在平面解析几何中表示双曲线，在空间解析几何中表示以 $xOy$ 平面上的双曲线 $x^2-y^2=1$ 为准线，母线平行于 $z$ 轴的双曲柱面.

【习题 8-4】

3．分别求母线平行于 $x$ 轴及 $y$ 轴而且通过曲线 $\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程.

**解**：消去 $x$ 得母线平行于 $x$ 轴且通过已知曲线的柱面方程 $3y^2-z^2=16$，消去 $y$ 得母线平行于 $y$ 轴且通过已知曲线的柱面方程 $3x^2+2z^2=16$.

4．求球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$ 的交线在 $xOy$ 面上的投影的方程.

**解**：消去 $z$ 得母线平行于 $z$ 轴的柱面方程 $x^2+y^2+(1-x)^2=9$，即 $2x^2+y^2-2x-8=0$，从而所求投影曲线为 $\begin{cases}2x^2+y^2-2x-8=0\\z=0\end{cases}$.

【习题 8-5】

3．求过 $M_1(1,1,-1)$，$M_2(-2,-2,2)$，$M_3(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

**解**：由平面的三点式方程有

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z+1\\-2-1 & -2-1 & 2+1\\1-1 & -1-1 & 2+1\end{vmatrix}=0$$

即 $x-3y-2z=0$.

6．一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 和 $\boldsymbol{b}=(1,-1,0)$，试求该平面方程.

**解**：取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\2 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\end{vmatrix}=(1,1,-3)$，故由点法式方程有

$$1\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)-3\cdot(z+1)=0$$

即 $x+y-3z-4=0$.

【习题 8-6】

4．求过点 $(2,0,-3)$ 且与直线 $\begin{cases}x-2y+4z-7=0\\2x+5y-2z+1=0\end{cases}$ 垂直的平面方程.

**解**：直线的方向向量 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\1 & -2 & 4\\3 & 5 & -2\end{vmatrix}=(-16,14,11)$，取 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}$，则由点法式方程有 $-16(x-2)+14(y-0)+11(z+3)=0$，即 $16x-14y-11z-65=0$.

7．求过点 $(0,2,4)$ 且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程.

**解**：所求直线与两平面的交线 $\begin{cases}x+2z=1\\y-3z=2\end{cases}$ 平行，可设所求直线为 $\begin{cases}x+2z=a\\y-3z=b\end{cases}$. 又直线过点 $(0,2,4)$，由此可得 $a=8$，$b=-10$. 于是所求直线方程为 $\begin{cases}x+2z=8\\y-3z=-10\end{cases}$.

15．求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

**解**：设过已知直线的平面束方程为$2x-4y+z+\lambda(3x-y+2z-9)=0$，即

$$(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$$

由$(2+3\lambda)\cdot 4+(-4-\lambda)\cdot -1+(1-2\lambda)\cdot 1=0$知$\lambda=-\dfrac{13}{11}$，得投影平面方程

$$17x+31y-37z-117=0$$

从而投影直线方程为$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\4x-y+z=1\end{cases}$.

## 8.2.6　练习题

1．填空题

（1）过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases}x=-t+2\\y=3t-4\\z=t-1\end{cases}$垂直的平面方程是________.

（2）点$(1,-2,3)$关于平面$2x-3y+4z+9=0$的对称点是________.

（3）直线$\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$和直线$\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+4=0\end{cases}$间的最短距离是________.

（4）曲线$\begin{cases}x^2+y^2+2z^2=1\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$在$xOy$上的投影曲线方程是________.

2．选择题

（1）动点到平面$x=-1$的距离等于动点到点$(1,0,0)$的距离，则动点的轨迹方程式是（　　）.

A．$y^2+x^2=4x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2+z^2=2x$　　D．$y^2=2x$

（2）方程组$\begin{cases}2x^2+y^2+4z^2=9\\x=1\end{cases}$表示（　　）.

A．椭球面　　B．$x=1$平面上的椭圆

C．椭圆柱面　　D．空间曲线在$x=1$平面上的投影

（3）设空间直线的对称式方程为$\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$则该直线必（　　）.

A．过原点且垂直于$x$轴　　B．过原点且垂直于$y$轴

C．过原点且垂直于$z$轴　　D．过原点且平行于$x$轴

（4）直线$\begin{cases}x=2+t\\y=-1-t\\z=1+3t\end{cases}$与平面$x-5y+6z-7=0$的关系是（　　）.

A．直线在平面上　　B．垂直

C．平行，但直线不在平面上　　D．不垂直，但相交于一点

3．计算题

（1）求旋转抛物面$z=x^2+y^2$与平面$y+z=1$的交线在$xOy$平面上投影方程.

（2）分别在下列条件下确定 $l,m,n$ 的值：

a．使 $(l-3)x+(m+1)y+(n-3)z+8=0$ 和 $(m+3)x+(n-9)y+(l-3)z-16=0$ 表示同一平面；

b．使 $2x+my+3z-5=0$ 与 $lx-6y-6z+2=0$ 表示两张平行平面；

c．使 $lx+y-3z+1=0$ 与 $7x+2y-z=0$ 表示两张互相垂直的平面.

（3）求过点 $(1,2,3)$ 且与直线 $L$： $x-1=y=1-z$ 垂直相交的直线方程.

## 习题答案

1．（1）$x-3y-z+4=0$；　（2）$(-3,4,-5)$；　（3）1；　（4）$\begin{cases}3y^2-x^2=1\\z=0\end{cases}$.

2．（1）A；　（2）B；　（3）A；　（4）D.

3．（1）从曲线方程 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\y+z=1\end{cases}$ 中消去 $z$，得曲线在 $xOy$ 平面上的投影柱面方程 $x^2+y^2+y=1$．于是曲线在 $xOy$ 平面上的投影曲线的方程为 $\begin{cases}x^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}\\z=0\end{cases}$

（2）a．欲使所给的两方程表示同一平面，则：

$$\frac{l-3}{m+3}=\frac{m+1}{n-9}=\frac{n-3}{l-3}=\frac{8}{-16}$$

即：

$$\begin{cases}m+2l-3=0\\n+2m-7=0\\l+2n-9=0\end{cases}$$

从而：$l=\dfrac{7}{9}$， $m=\dfrac{13}{9}$， $n=\dfrac{37}{9}$.

b．欲使所给的两方程表示两平行平面，则 $\dfrac{2}{l}=\dfrac{m}{-6}=\dfrac{3}{-6}$，所以：$l=-4$， $m=3$.

c．欲使所给的两方程表示两垂直平面，则 $7l-2+3=0$，所以：$l=-\dfrac{1}{7}$.

（3）过点作垂直已知直线的平面方程为 $(x-1)+(y-2)+(z-3)=0$，由 $\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=1-t\end{cases}$ 代入平面得垂足 $(5,4,-3)$. 所求直线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$.

## 8.2.7　考研真题

**【例 1】**（1990 年数一）　求过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $L$: $\begin{cases}x=-t+2\\y=3t-4\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程.

**解**：易知直线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,3,1)$，依题意知这也是所求平面的法向量. 故所求平面的点法式方程为 $-1(x-1)+3(y-2)+1(z+1)=0$，即 $x-3y-z+4=0$.

**评注**：本题较为简单，主要考察如何运用平面的点法式方程，同时考察了如何从直线的参数方程确定直线的方向向量.

**【例 2】**（1991 年数一）　已知两条直线方程 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1},L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过 $L_1$ 且平行于 $L_2$ 的平面方程.

**解**：由于所求平面过 $L_1$ 且平行于 $L_2$，故其法向量同时垂直于 $L_1$ 和 $L_2$ 的方向向量. 从而取其法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，又已知平面上一点的坐标为 $(1,2,3)$，故其点法式方程为 $1(x-1)-3(y-2)+1(z-3)=0$，即 $x-3y+z+2=0$.

**评注**：本题的关键在于如何确认平面的法向量，在求一个同时垂直于两已知向量的向量时，向量积是一个常用的工具.

**【例 3】**（1995 年数一）　试确定直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 与平面 $\Pi:4x-2y+z-2=0$ 的位置关系.

**解**：易知直线 $L$ 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=-28\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，即 $\boldsymbol{s}=(4,-2,1)$. 而平面 $\Pi$ 的法向量亦为 $\boldsymbol{n}=(4,-2,1)$. 从而可知直线 $L$ 垂直于平面 $\Pi$.

**评注**：考察空间中直线和平面的关系，往往可以转化为考察它们的方向向量和法向量的关系.

**【例 4】**（1996 年数一）　设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

**解**：设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，依题意知 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $(4,-1,2)$ 及向量 $(6,-3,2)$ 同时垂直. 故 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-1&2\\6&-3&2\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，从而所求平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

**评注**：本题与前面第 2 题一样，关键在于确定所求平面的方向向量. 在求一个同时垂直于两已知向量的向量时，可以利用向量积，也可以利用数量积，请同学们思考如何利用数量积求出 $\boldsymbol{n}$.

**【例 5】**（1998 年数一）　求（1）直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ 在平面 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 $L_0$ 的方程；

（2）直线 $L_0$ 绕 $y$ 轴旋转一周形成的曲面方程.

**解**：（1）已知直线方向向量为 $(1,1,-1)$，平面的法向量为 $(1,-1,2)$. 从而可知过直线 $L$ 且与

平面 $\Pi$ 垂直的平面 $\Pi'$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，又已知 $\Pi'$ 过点 $(1,0,-1)$，故该平面方程为 $1(x-1)-3y-2(z+1)=0$，即 $x-3y-2z+1=0$．而 $L_0$ 实际上是平面 $\Pi$ 和 $\Pi'$ 的交线，故 $L_0$ 的方程为 $\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$．

（2）将直线 $L_0$ 的方程写成参数式 $\begin{cases}x=4t\\ y=2t\\ z=-t+\dfrac{1}{2}\end{cases}$，绕 $y$ 轴旋转一周后得到的旋转曲面方程为：

$\begin{cases}x=\sqrt{16t^2+\left(-t+\dfrac{1}{2}\right)^2}\cos\theta\\ y=2t\\ z=\sqrt{16t^2+\left(-t+\dfrac{1}{2}\right)^2}\sin\theta\end{cases}$，即 $\begin{cases}x^2+z^2=16t^2+\left(-t+\dfrac{1}{2}\right)^2\\ y=2t\end{cases}$，进一步化简可得到旋转曲面的方程为 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$．

评注：本题第（1）问关键在于将所求直线看成两张互相垂直的平面的交线，而这两张平面的方程利用相关知识是容易求出的，这样的问题也可利用平面束就行求解（参见课后习题 8-6 第 15 题）．第（2）问较难，我们课本上只介绍了坐标面上的曲线绕坐标轴旋转生产旋转曲面的方法，而这里要求的是空间曲线绕坐标轴旋转得到的旋转曲面方程．一般地，空间曲线 $\Gamma$ 的参数方程为：

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\\ z=\omega(t)\end{cases}$$

则 $\Gamma$ 绕 $z$ 轴旋转后形成的曲面方程为：

$$\begin{cases}x=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\cos\theta\\ y=\sqrt{\varphi^2(t)+\psi^2(t)}\sin\theta\\ z=\omega(t)\end{cases}\quad\begin{pmatrix}\alpha\leqslant t\leqslant\beta\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{pmatrix}$$

绕 $x$ 轴和绕 $y$ 轴旋转所得的旋转曲面方程也可类似求出．

【例 6】（2006 年数一）　点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $z=$________．

解：易知平面法向量为 $(3,4,5)$，故由点到平面的距离公式知 $z=\dfrac{6+4+0}{\sqrt{9+16+25}}=\sqrt{2}$．

评注：本题较简单，直接套公式即可，所以同学们应熟悉本节中出现的常用公式．

【例 7】（2008 年数一）　已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\ x+y+3z=5\end{cases}$，求 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点．

**解**：易知曲线到 $xOy$ 面的距离实际上为 $|z|$，由 $x^2+y^2-2z^2=0$ 得 $\begin{cases} x=\sqrt{2}z\cos\theta \\ y=\sqrt{2}z\sin\theta \end{cases}$，代入 $x+y+3z=5$ 得 $z=\dfrac{5}{3+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)}$，所以只要求 $z=z(\theta)$ 的最值.

令 $z'(\theta)\dfrac{5\sqrt{2}(-\sin\theta+\cos\theta)}{(3+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta))^2}=0$，得 $\cos\theta=\sin\theta$，解得 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$，从而得到两组解 $(-5,-5,5)$、$(1,1,1)$. 由几何意义知这是 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点.

**评注**：本题结合了空间解析几何和函数极值的相关知识，在上述解答过程中，我们通过引入参数 $\theta$ 把曲线方程化简，最终转化为一元函数的极值问题. 实际上同学们在学习了下一章多元函数的条件极值后，也可不引入参数而直接利用拉格朗日乘数法进行求解.

## 8.2.8　总习题八选讲

7．设 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=1$，$(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{6}$，求向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角.

**解**：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=3+1+2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=7$,

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=3+1-2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=1$.

设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta$，则

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{3-1}{\sqrt{7}\cdot 1}=\frac{2}{\sqrt{7}},$$

$$\theta=\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}.$$

8．设 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求 $(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$.

**解**：因为 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}\perp 7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$,

所以　$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$,

即　$7|\boldsymbol{a}|^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15|\boldsymbol{b}|^2=0$, $7|\boldsymbol{a}|^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8|\boldsymbol{b}|^2=0$,

又以上两式可得

$$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}},$$

于是

$$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{2},\ (\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{3}.$$

9．设 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-2)$, $\boldsymbol{b}=(1,1,z)$，问 $z$ 为何值时 $(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$ 最小？并求出此最小值.

**解**：$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$.

因为当 $0<(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\cos(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$ 为单调减函数. 求 $(\boldsymbol{a},\hat{}\,\boldsymbol{b})$ 的最小值也就是求 $f(z)=\dfrac{1-2z}{3\sqrt{2+z^2}}$ 的最大值.

令 $f'(z)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{-4-z}{(2+z^2)^{3/2}}=0$，得 $z=-4$.

当 $z=-4$ 时，$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})_{\min}=\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\pi}{4}$.

11．设 $\boldsymbol{a}=(2,-3,1), \boldsymbol{b}=(1,-2,3), \boldsymbol{c}=(2,1,2)$，向量 $\boldsymbol{r}$ 满足 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}, \mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=14$，求 $\boldsymbol{r}$.

**解**：设 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

因为 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=0, \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$2x-3y+z=0,\ x-2y+3z=0.$$

又因为 $\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=14$，所以 $\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=14$，即

$$2x+y+2z=42.$$

解线性方程组

$$\begin{cases}2x-3y+z=0\\ x-2y+3z=0\\ 2x+y+2z=42\end{cases},$$

得 $x=14, y=10, z=2$, 所以 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

另解　因为 $\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-3&1\\1&-2&3\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 平行，故可设 $\boldsymbol{r}=\lambda(7,5,1)$.

又因为 $\mathrm{Prj}_{c}\boldsymbol{r}=14$，所以 $\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{1}{|\boldsymbol{c}|}\boldsymbol{c}=14$, $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{c}=42$，即

$$\lambda(7\times2+5\times1+1\times2)=42,\ \lambda=2,$$

所以 $\boldsymbol{r}=(14,10,2)$.

12．设 $\boldsymbol{a}=(-1,3,2), \boldsymbol{b}=(2,-3,-4), \boldsymbol{c}=(-3,12,6)$，证明三向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面，并用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示 $\boldsymbol{c}$.

**证明**：向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$. 因为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-1&3&2\\2&-3&-4\end{vmatrix}=-6\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-6)\times(-3)+0\times12+(-3)\times6=0,$$

所以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 共面.

设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，则有

$$(-\lambda+2\mu,\ 3\lambda-3\mu,\ 2\lambda-4\mu)=(-3,12,6),$$

即有方程组

$$\begin{cases}-\lambda+2\mu=-3\\ 3\lambda-3\mu=12\\ 2\lambda-4\mu=6\end{cases},$$

解之得$\lambda = 5, \mu = 1$，所以 $\boldsymbol{c} = 5\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

15．求通过点 $A(3, 0, 0)$和 $B(0, 0, 1)$且与 $xOy$ 面成$\dfrac{\pi}{3}$角的平面的方程.

**解**：设所求平面的法线向量为 $\boldsymbol{n} = (a, b, c)$.

$\overrightarrow{BA} = (3,\ 0,\ -1)$，$xOy$ 面的法线向量为 $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

按要求有 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$，$\dfrac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{k}|} = \cos\dfrac{\pi}{3}$，

即
$$\begin{cases} 3a - c = 0 \\ \dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

解之得 $c=3a$，$b = \pm\sqrt{26}a$．于是所求的平面的方程为

$$(x-3) \pm \sqrt{26}y + 3z = 0,$$

即
$$x + \sqrt{26}y + 3z = 3\text{，或 } x - \sqrt{26}y + 3z = 3.$$

16．设一平面垂直于平面 $z = 0$，并通过从点$(1, -1, 1)$到直线$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$的垂线，求此平面方程.

**解**：直线$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$的方向向量为 $\boldsymbol{s} = (0, 1, -1)\times(1, 0, 0)=(0, -1, -1)$.

设点$(1,\ -1,\ 1)$到直线$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$的垂线交于点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$．因为点$(x_0,\ y_0,\ z_0)$在直线$\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$上，所以$(x_0, y_0, z_0) = (0, y_0, y_0+1)$．于是，垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}_1 = (-1, y_0+1, y_0).$$

显然有 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}_1 = 0$，即

$$-y_0 - 1 - y_0 = 0,\quad y_0 = -\frac{1}{2}.$$

从而 $\boldsymbol{s}_1 = (-1, y_0 + 1, y_0) = \left(-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

所求平面的法线向量可取为

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{s}_1 = \boldsymbol{k} \times \left(-\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}\boldsymbol{k}\right) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},$$

所求平面的方程为

$$-\frac{1}{2}(x-1) - (y+1) = 0\text{，即 } x+2y+1 = 0$$

17．求过点$(-1, 0, 4)$，且平行于平面 $3x-4y+z-10 = 0$，又与直线$\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z}{2}$相交的直线的方程.

**解**：过点(−1, 0, 4)，且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$ 的平面的方程为

$$3(x+1)-4(y-0)+(z-4)=0\text{，即 }3x-4y+z-1=0.$$

将直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 化为参数方程 $x=-1+t,\ y=3+t,\ z=2t$，代入平面方程 $3x-4y+z-1=0$，得

$$3(-1+t)-4(3+t)+2t-1=0,$$

解得 $t=16$. 于是平面 $3x-4y+z-1=0$ 与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 的交点的坐标为(15, 19, 32)，这也是所求直线与已知直线的交点的坐标.

所求直线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(15,19,32)-(-1,0,4)=(16,19,28),$$

所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{16}=\frac{y}{19}=\frac{z-4}{28}.$$

18．已知点 $A(1, 0, 0)$及点 $B(0, 2, 1)$，试在 $z$ 轴上求一点 $C$，使$\Delta ABC$ 的面积最小.

**解**：设所求的点为 $C(0, 0, z)$, 则 $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ z)$，$\overrightarrow{BC}=(0,\ -2,\ z-1)$.

因为
$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & z\\ 0 & -2 & z-1\end{vmatrix}=2z\boldsymbol{i}+(z-1)\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

所以$\Delta ABC$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8z+2(z-1)}{\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}}=0$，得 $z=\dfrac{1}{5}$，所求点为 $C\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{5}\right)$.

20．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

**解**：锥面与柱面交线在 $xOy$ 面上的投影为

$$\begin{cases}2x=x^2+y^2\\ z=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1\\ z=0\end{cases},$$

所以，立体在 $xOy$ 面上的投影为$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\leqslant 1\\ z=0\end{cases}$.

锥面与柱面交线在 $yOz$ 面上的投影为

$$\begin{cases}z=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}z^2\right)^2+y^2}\\ x=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}\left(\dfrac{z^2}{2}-2\right)^2+y^2=1\\ x=0\end{cases},$$

所以，立体在 $yOz$ 面上的投影为$\begin{cases}\left(\dfrac{z^2}{2}-2\right)^2+y^2\leqslant 1\\ x=0\end{cases}$.

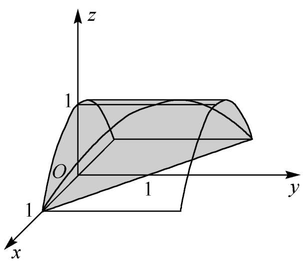
锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 与平面 $y=0$ 的交线为

$$\begin{cases}z=|x|\\ y=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}z=\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases},$$

所以，立体在 $zOx$ 面上的投影为

$$\begin{cases}x\leqslant z\leqslant\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases}.$$

21．画出下列各曲面所围立体的图形：



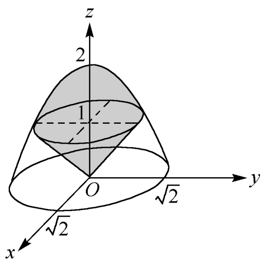




图 8-2-2

（2）抛物柱面 $x^2=1-z$，平面 $y=0, z=0$ 及 $x+y=1$；

（3）圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及旋转抛物面 $z=2-x^2-y^2$；

# 第 9 章　多元函数微分法及其应用

## 9.1　多元函数、偏导数和全微分

### 9.1.1　基本要求

1．理解多元函数的概念，理解二元函数的几何意义.

2．了解二元函数的极限与连续性的概念，以及有界闭域上连续函数的性质.

3．理解偏导数与全微分的概念，会求全微分，了解全微分存在的必要条件和充分条件，了解全微分的形式不变性.

### 9.1.2　基本内容

**1．多元函数的概念**

设 $D$ 是 $\mathrm{R}^2$ 的一个非空子集，称映射 $f: D\to \mathrm{R}$ 为定义在 $D$ 上的二元函数, 通常记为

$$z=f(x, y), (x, y)\in D\ （或\ z=f(P), P\in D）$$

其中点集 $D$ 称为该函数的定义域, $x, y$ 称为自变量, $z$ 称为因变量.

一般地, 称有序实数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的全体为 $n$ 维向量空间，简称 $n$ 维空间，记成 $\mathbf{R}^n$，其中每个有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为 $\mathbf{R}^n$ 中一个点. 设 $D$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个非空子集,映射 $f: D\to\mathbf{R}$ 就称为定义在 $D$ 上的 $n$ 元函数，通常记为

$$u=f(x_1, x_2, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D,$$

或简记为

$$u=f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D,$$

也可记为

$$u=f(P), P(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in D\ .$$

**2．二元函数的几何意义**

空间点集$\{(x, y, z)|z=f(x, y), (x, y)\in D\}$称为二元函数 $z=f(x, y)$的图形, 二元函数的图形是一空间曲面，$z=f(x, y)$的定义域 $D$ 是该曲面在 $xOy$ 平面上的投影.

**3．二元函数的极限**

设二元函数 $f(P)=f(x, y)$的定义域为 $D$, $P_0(x_0, y_0)$是 $D$ 的聚点. 如果存在常数 $A$，对于任意给定的正数$\varepsilon$，总存在正数 $\delta$，使得当 $P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，都有

$$|f(P)-A|=|f(x, y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称常数 $A$ 为函数 $f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A\text{，或} f(x,y)\to A\ ((x,y)\to(x_0,y_0)),$$

也记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \text{ 或 } f(P)\to A(P\to P_0).$$

上述定义的极限也称为二重极限.

#### 4．二元函数的连续性

设二元函数 $f(P)=f(x,y)$ 的定义域为 $D$, $P_0(x_0,y_0)$ 为 $D$ 的聚点，且 $P_0\in D$．如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\text{，或} \lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

#### 5．有界闭域上连续函数的性质

（1）有界性与最大值最小值定理

在有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数，必定在 $D$ 上有界, 且能取得它的最大值和最小值.

（2）介值定理

在有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

#### 6．偏导数的概念

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义, 当 $y$ 固定在 $y_0$ 而 $x$ 在 $x_0$ 处有增量 $\Delta x$ 时, 相应的函数有增量

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $x$ 的偏导数，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ \left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}\text{，或} f_x(x_0,y_0).$$

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处对 $y$ 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

记作 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，或 $f_y(x_0,y_0)$.

如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 内每一点 $(x,y)$ 处存在对 $x$（或对 $y$）的偏导数，那么得到函数 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 上对 $x$（或对 $y$）的偏导函数（在不至于混淆的地方也简称为偏导数），记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x\text{，或} f_x(x,y)\ \left(\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}, z_y\text{，或} f_y(x,y)\right).$$

### 7．偏导数的几何意义

设空间曲面$\Sigma$的方程是$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$，令$P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，$z_0=f(x_0,y_0)$，过$P_0$作平面$y=y_0$，与$\Sigma$的交线是$\Gamma$：$y=y_0$，$z=f(x,y)$．$\Gamma$是平面$y=y_0$上的一条曲线．于是，$z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$处偏导数$f_x(x_0,y_0)$的几何意义是：它作为一元函数$f(x,y_0)$在$x=x_0$处的导数，即是曲线$\Gamma$在点$P_0$处的切线对于$x$轴的斜率，即切线与$x$轴正向所成的倾角$\alpha$的正切$\tan\alpha$．类似地，$f_y(x_0,y_0)$是平面$x=x_0$与曲面$\Sigma$的交线在点$P_0$处的切线关于$y$轴的斜率$\tan\beta$．

### 8．高阶偏导数的概念

设函数$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\text{，}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)\text{，}$$

那么在$D$内$f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$都是$x,y$的函数．如果这两个函数的偏导数也存在，则称它们是函数$z=f(x,y)$的二阶偏导数．按照对变量求导次序的不同有下列四个二阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)\text{，}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)\text{，}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)\text{，}\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

其中第二、三两个偏导数称为混合偏导数．同样可得三阶、四阶、…以及$n$阶偏导数．二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数．

二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关，即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

### 9．全微分的概念

设函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的某邻域内有定义，如果函数在点$(x,y)$的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)\ ,$$

其中$A$、$B$不依赖于$\Delta x$、$\Delta y$而仅与$x$、$y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分，记作$\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

如果函数在区域$D$内各点处都可微分，那么称这函数在$D$内可微分．

### 10．全微分存在的必要条件和充分条件

（1）必要条件

如果函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，则该函数在点$(x,y)$的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x}$、$\dfrac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y\,.$$

（2）充分条件

如果函数 $z=f(x,y)$的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 在点$(x,y)$连续，则函数在该点可微分.

**11．全微分的形式不变性**

设 $z=f(u,v)$具有连续偏导数，则有全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\,.$$

如果 $u,v$ 又是中间变量，即 $u=\varphi(x,y),\ v=\psi(x,y)$，且也具有连续偏导数，则复合函数

$$z=f[\varphi(x,y),\ \psi(x,y)]$$

的全微分为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

由此可见，无论 $u$、$v$ 是自变量还是中间变量，函数 $z=f(u,v)$的全微分形式是一样的.

## 9.1.3　典型例题

**【例 1】** 设 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

**解法一**：因为所求函数与 $f(u,v)$的对应规则相同，只是变量被代换，即 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，由此有

$$x=\frac{u}{1+v},y=\frac{uv}{1+v}$$

故 $f(u,v)=f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=u^2\frac{1-v^2}{(1+v)^2}$

即 $f(x,y)=x^2\frac{1-y^2}{(1+y)^2}=x^2\frac{1-y}{1+y}$

**解法二**：因为 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2=(x+y)^2\cdot\frac{x-y}{x+y}=(x+y)^2\cdot\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

所以 $f(x,y)=x^2\dfrac{1-y}{1+y}$

**评注**：解法二采用的拼凑法，技巧性比较强．解法一是通用的方法．

**【例 2】** 求函数 $z=\ln[x\ln(y-x)]$ 的定义域.

**解**：这是复合函数 $z=\ln u, u=x\ln(y-x)$，因此要求 $u>0$ 且 $y-x>0$，即

$$\begin{cases}x>0\\ \ln(y-x)>0\\ y-x>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}x<0\\ \ln(y-x)<0\\ y-x>0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x>0\\ y-x>1\end{cases} \text{或} \begin{cases}x<0\\ 0<y-x<1\end{cases}$$

因此，函数的定义域为 $D=\{(x,y)\big|x>0, y-x>1 \text{或} x<0, 0<y-x<1\}$.

**评注**：注意每层复合函数应满足的条件.

**【例 3】** 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$；

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$

**解**：（1）$(x^2+y^2)^{xy}=\mathrm{e}^{xy\ln(x^2+y^2)}=\mathrm{e}^{\frac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}$

令 $u=x^2+y^2$，有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=\lim\limits_{u\to0^+}u\ln u=0$

而 $\left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant1$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y)=0$

因此 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}=\mathrm{e}^0=1$

（2）解法一：因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)=+\infty$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$

解法二：因为 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x^2y^2}{2|xy|}=\dfrac{1}{2}|xy|$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

解法三：令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2}=\lim\limits_{r\to0}r^2\sin^2\theta\cos^2\theta=0$

（3）因为 $0\leqslant\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}=\dfrac{|x|}{x^2+y^2}+\dfrac{|y|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{|x|}{x^2}+\dfrac{|y|}{y^2}=\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\left(\dfrac{1}{|x|}+\dfrac{1}{|y|}\right)=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}=0.$

（4）因为 $1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)^2,((x,y)\to(0,0))$，所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}2\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

而 $0\leqslant2\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{x^2y^2}{|xy|}=|xy|$， $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}=0$$

**评注**：计算二元函数极限主要方法有：①利用初等变换，如（1），将其转化成指数函数（或取对数）后，利用变量替换，转化成求一元函数的极限；②利用不等式，使用夹逼准则，例如（2）（3）；③利用初等函数的连续性及极限的四则运算，例如（1）；④利用等价无穷小，例如（4）．同时，应注意各种方法的结合应用.

**【例 4】** 判断下列二元函数极限的存在性：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$；

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}\quad(a\neq0)$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x+y}$.

**解**：（1）$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=-x}}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x-\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2}{x-\tan x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x}{1-\sec^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\tan^2x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x^2}=\infty$$

因此，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(1+xy)}{x+\tan y}$ 不存在.

（2）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\right]^{\frac{x^2}{xy(x+y)}}$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{xy}\overset{t=xy}{=\!=\!=}\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}=\mathrm{e}$， $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\dfrac{x^2}{xy(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\dfrac{1}{y\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}=\dfrac{1}{a}$

因此，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}$，故极限存在.

（3）由于当 $y=-x$ 时，分母为零，因此不妨考虑沿与 $y=-x$ 相切的曲线路径的极限. 例如，令 $y=mx^2-x\ (m\neq 0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=mx^2-x}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x(mx^2-x)}{x+mx^2-x}=\lim_{x\to 0}\frac{mx-1}{m}=-\frac{1}{m}$$

故该极限与 $m$ 有关，因此原二元函数极限不存在.

**评注**：判断二元函数的极限不存在的普遍做法，一是选择特殊路径，使沿该路径的极限不存在；二是选取两种特殊的路径，使沿这两种路径的极限值不相等.

**【例 5】** 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求证（1）$f(x,y)$在点（0,0）处连续，（2）$f_x(0,0),f_y(0,0)$存在，（3）$f_x(x,y),f_y(x,y)$在点(0,0)处不连续，（4）$f(x,y)$在点（0,0）处可微.

**证明**：（1）$\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，

由于 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta x\cdot\Delta y=0$ 且 $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1$，从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\\Delta y\to 0}}\Delta f=0$，故 $f(x,y)$在点（0,0）处连续.

（2）
$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

故 $f_x(0,0),f_y(0,0)$ 存在.

（3）当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，

$$f_x(x,y)=\left(xy\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(x,y)=x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由于当$(x,y)$沿直线 $y=x$ 的方向趋于(0,0)时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y=x}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}|x|}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{2}|x|}\right)$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}|x|}=0$，而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}|x|}$ 不存在，从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_x(x,y)$ 不存在，故 $f_x(x,y)$ 在点(0,0)处不连续. 同理，$f_y(x,y)$ 在点(0,0)处不连续.

（4）在点（0,0）处，由于 $\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\cdot\Delta y\cdot\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，令 $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\rho}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\sin\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

因为 $0\leqslant\left|\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant\left|\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{2|\Delta x\Delta y|}}\right|=\left|\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{2}}\right|$，而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left|\dfrac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{2}}\right|=0$，

所以 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$，又因为 $\left|\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right|\leqslant 1$，因此 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\rho}=0$，从而函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）处可微.

## 9.1.4　疑难释疑

1．在二元函数极限中，当点 $P(x, y)$ 沿着任一直线无限趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，如果 $f(x,y)$ 都趋于 $A$，这时能否断定极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在且等于 $A$?

答：不能. 例如，函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$，当点 $P(x,y)$ 沿着任意一条直线 $y=kx$ 趋于 $P_0(0,0)$ 时，都有 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^2}{x+kx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx}{1+k}=0$. 但此时，仍不能断定 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 由例 4（3）已证明极限不存在.

其实，根据二重极限的定义，在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的去心邻域内，动点 $P(x, y)$ 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式是任意的. 尽管动点 $P(x, y)$ 沿着任一直线趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 的极限都存在且都等于 $A$，但毕竟只是沿着直线变动，而趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 的方式还有很多，比如各种曲线方式，因此无法肯定当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的二重极限是否存在，更不能断定二重极限是 $A$.

2．判定二重极限不存在，有哪些常用方法?

答：根据二重极限的定义，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 存在，要求 $P(x, y)$ 以任何方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，$f(x, y)$ 都有相同的极限. 因此，判定二重极限不存在，通常有下列两种方法：

（1）选取 $P\to P_0$ 的一种特殊方式，通常取沿某条过 $P_0$ 的直线或曲线趋于 $P_0$，按此方式极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(x,y)$ 不存在；

（2）找出 $P \to P_0$ 的两种方式，通常取沿两条过 $P_0$ 的直线或曲线 $C_1, C_2$，使得

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_1}} f(x,y)=A_1,\ \lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in C_2}} f(x,y)=A_2$$

且 $A_1 \neq A_2$.

3．求较简单的二元函数的极限有哪些常用方法？

答：由于二元函数 $f(x, y)$极限定义中，动点 $P(x, y)$趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$的方式是任意的，相比一元函数 $f(x)$的极限只有左、右两个单侧极限而言，要复杂得多. 求二元函数的极限常用的方法有：①利用不等式，使用夹逼准则；②利用初等函数的连续性及极限的四则运算；③利用初等变换，特别是幂指函数转化为指数形式或者对数形式；④利用等价无穷小；⑤若能事先判定其极限值，可再利用 $\varepsilon-\delta$ 方法证明.

4．多元函数的偏导数记号 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$（或 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$）能否理解为 $\partial z$ 与 $\partial x$（或 $\partial z$ 与 $\partial y$）之商？

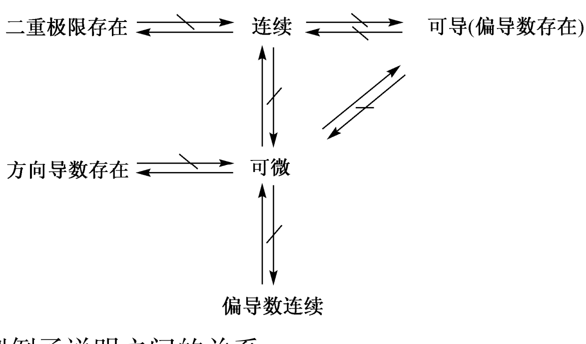
答：一元函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以理解为 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 之商，因为 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}x$ 分别为 $y$ 与 $x$ 的微分，有其独立的含义，因此一元函数的导数也称为微商. 而在多元函数中 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 就不能理解为 $\partial z$ 与 $\partial x$ 之商了，只能作为一个整体记号来理解，仅指函数 $z$ 关于变量 $x$ 的偏导数，而与其它变量无关，因此也与 $z$ 的全微分 $\mathrm{d}z$ 无关. 例如，函数 $z = xy$，那么 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$，$\dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{z}{y^2}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{1}{x}$，这样就有

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{xy} = -1 .$$

若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 能理解为 $\partial z$ 与 $\partial x$ 之商，$\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ 也类似，则上式右端应为 1，因此也说明记号 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 不能理解为 $\partial z$ 与 $\partial x$ 之商.

5．二元函数的连续性、可偏导性（即存在一阶偏导数）和可微性等之间有没有联系？

答：对于一元函数而言，可导必定连续，可导与可微等价，然而在多元函数中，这些关系不再保持. 为了方便掌握相互间的联系与区别，列出关系图加以说明，下面图中的记号“→”表示可以推导，“$\not\rightarrow$”表示无法推导.




下面给出一些典型例子说明之间的关系.

（1）二元函数连续但不存在偏导数

例如，$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在（0,0）处连续，但在（0,0）处偏导数不存在.

（2）二元函数存在偏导数，但函数不连续

例如，$f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2, & xy\neq 0 \\ 1, & xy=0 \end{cases}$，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq f(0,0)$，故在(0,0)处不连续.

（3）二元函数存在偏导数，但函数不可微分.

例如，$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，函数 $f(x,y)$ 在（0,0）处连续且偏导数 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但 $f(x,y)$ 在(0,0)处不可微分. 需指出的，若函数 $f(x,y)$ 在$(x_0, y_0)$处可微，则 $f(x,y)$ 在$(x_0, y_0)$处一定连续.

（4）二元函数存在连续的偏导数是函数可微的充分条件，而非必要条件.

例如，$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，函数 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微，具有一阶偏导数，但一阶偏导数在(0,0)处不连续.

## 9.1.5　部分习题解答

【习题 9-1】

3．试证函数 $F(x, y) = \ln x\cdot\ln y$ 满足关系式:

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v).$$

**证明**：$F(xy, uv) = \ln(xy)\cdot\ln(uv)$

$= (\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$= \ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$

$= F(x, u)+F(x, v)+F(y, u)+F(y, v).$

5．求下列各函数的定义域:

（3）$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

**解**：要使函数有意义，必须

$$y\geqslant 0, x-\sqrt{y}\quad 0 \text{ 即 } x\geqslant\sqrt{y},$$

于是有 $x\geqslant 0$ 且 $x^2\geqslant y$,

故函数定义域为

$$D = \{(x, y)|\ x\geqslant 0, y\geqslant 0, x^2\geqslant y\}.$$

（4）$z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

**解**：要使函数有意义，必须

$$y-x > 0, x\geqslant 0, 1-x^2-y^2>0,$$

故函数的定义域为

$$D = \{(x, y) | y > x \geqslant 0, x^2+y^2 < 1\}.$$

（6）$u = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

**解**：要使函数有意义，必须

$$x^2+y^2 \neq 0，且 \left|\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \leqslant 1 即 z^2 \leqslant x^2 + y^2,$$

故函数定义域为

$$D = \{(x, y, z) | z^2 \leqslant x^2 + y^2, x^2 + y^2 \neq 0\}.$$

6．求下列各极限：

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

**解**：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}+1)(\sqrt{xy+1}-1)}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2$.

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y}$;

**解**：$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin(xy)}{y} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{\sin xy}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2$.

（6）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

**解**：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

$= \dfrac{1}{2} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} = 0$（用等价无穷小代换）.

*7．证明下列极限不存在:

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

**证明**：如果动点 $P(x, y)$沿 $y = x$ 趋于$(0, 0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4} = 1;$$

如果动点 $P(x, y)$沿 $y = 2x$ 趋向$(0, 0)$，则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=2x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{x\to0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2} = 0.$$

因此，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

*9．证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

**证明一：**因为 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\dfrac{\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$,

所以
$$0\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0.$$

因此
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

**证明二：**因为 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，故 $\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$.

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时恒有
$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}<\frac{\delta}{2}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

*10．设 $F(x,y)=f(x)$, $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$, $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

**证明：**由题设知，$f(x)$ 在 $x_0$ 处连续，故对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

作 $(x_0,y_0)$ 的邻域 $U((x_0,y_0),\delta)$，显然当 $(x,y)\in U((x_0,y_0),\delta)$ 时，$|x-x_0|<\delta$，从而
$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$
所以 $F(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续.

又因为 $y_0$ 是任意的，所以对任意 $y_0\in\mathbf{R}$, $F(x,y)$ 在 $(x_0,y_0)$ 处连续.

【习题 9-2】

1．求下列函数的偏导数：

（5）$z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;

**解：**$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{-x}{y^2}=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$.

（6）$z=(1+xy)^y$;

**解：**$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}=\mathrm{e}^{y\ln(1+xy)}\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}\right]$$

$$=(1+xy)^{y}\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

（7）$u=x^{\frac{y}{z}}$；

**解：** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\left(\frac{y}{z}-1\right)}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\ln x\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x.$$

（8）$u=\arctan(x-y)^z$;

**解：** $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

3．设 $z=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$ .

**解：** 因为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{x^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot\dfrac{1}{y^2}$，所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}+\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=2z$$

5．曲线 $\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4}\\ y=4\end{cases}$ 在点(2, 4, 5)处的切线对于 $x$ 轴的倾角是多少？

**解：** 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,4,5)}=1=\tan\alpha,$$

故 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 即为所求.

6．求下列函数的 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

（2）$z=\arctan\dfrac{y}{x}$；

**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

（3）$z=y^x$.

**解：** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$；

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2}$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(x\ln y+1)$$

9．验证：

（1）$y=\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\dfrac{\partial y}{\partial t}=k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$；

**证明：** 因为

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\mathrm{e}^{-kn^2t}\cdot\sin nx\cdot(-kn^2)=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\cdot\sin nx,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=n\mathrm{e}^{-kn^2t}\cos nx,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx,$$

$$k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-kn^2\mathrm{e}^{-kn^2t}\sin nx,$$

所以
$$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

（2）$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\dfrac{2}{r}$.

**证明：** $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$， $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\dfrac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\dfrac{r^2-x^2}{r^3}$，

由对称性知

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

因此
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}$$

$$=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}=\frac{3r^2-r^2}{r^3}=\frac{2}{r}.$$

【习题 9-3】

1．求下列函数的全微分：

（4）$u=x^{yz}$.

**解**：因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz\cdot x^{yz-1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=zx^{yz}\ln x,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=yx^{yz}\ln x,$$

所以 $$\mathrm{d}u=yzx^{yz-1}\mathrm{d}x+zx^{yz}\ln x\mathrm{d}y+yx^{yz}\ln x\mathrm{d}z.$$

3．求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x$=2, $y$=1, $\Delta x$=0.1, $\Delta y$=–0.2 时的全增量和全微分.

**解**：因为

$$\Delta z=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},\quad \mathrm{d}z=-\frac{y}{x^2}\Delta x+\frac{1}{x}\Delta y,$$

所以，当 $x=2, y=1, \Delta x=0.1, \Delta y=-0.2$ 时，

$$\Delta z=\frac{1+(-0.2)}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-0.119,$$

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{4}\times 0.1+\frac{1}{2}\times(-0.2)=-0.125.$$

*7．计算$(1.97)^{1.05}$的近似值($\ln 2=0.693$).

**解**：设 $z=x^y$，由于

$$(x+\Delta x)^{y+\Delta y}\approx x^y+\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y=x^y+yx^{y-1}\Delta x+x^y\ln x\Delta y,$$

所以取 $x=2, y=1, \Delta x=-0.03, \Delta y=0.05$ 可得

$$(1.97)^{1.05}\approx 2-0.03+2\ln 2\cdot 0.05=1.97+0.0693\approx 2.0393.$$

*9．设有一无盖圆柱形容器，容器的壁与底的厚度均为 0.1cm，内高为 20cm，内半径为 4cm，求容器外壳体积的近似值.

**解**：圆柱体的体积公式为 $V=\pi R^2h$，

$$\Delta V\approx \mathrm{d}V=2\pi Rh\Delta R+\pi R^2\Delta h,$$

当 $R=4, h=20, \Delta R=\Delta h=0.1$ 时，

$$\Delta V\approx 2\times 3.14\times 4\times 20\times 0.1+3.14\times 4^2\times 0.1\approx 55.3(\mathrm{cm}^3),$$

这个容器外壳的体积大约是 55.3cm$^3$.

*11. 测得一块三角形土地的两边长分别为 63±0.1m 和 78±0.1m，这两边的夹角为 60°±1°，试求三角形面积的近似值，并求其绝对误差和相对误差.

**解**：设三角形的两边长为 $x$ 和 $y$，它们的夹角为 $z$，则三角形面积为 $S=\dfrac{1}{2}xy\sin z$.

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}y\sin z\mathrm{d}x+\frac{1}{2}x\sin z\mathrm{d}y+\frac{1}{2}xy\cos z\mathrm{d}z$$

$$|\Delta S|\approx|\mathrm{d}S|\leqslant\frac{1}{2}y\sin z|\mathrm{d}x|+\frac{1}{2}x\sin z|\mathrm{d}y|+\frac{1}{2}xy\cos z|\mathrm{d}z|.$$

令 $x=63, y=78$，$z=\dfrac{\pi}{3}, |\mathrm{d}x|=0.1, |\mathrm{d}y|=0.1$，$\mathrm{d}z=\dfrac{\pi}{180}$，则

$$\delta s \approx \frac{78}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{63}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.1+\frac{63\times 78}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{180}=27.55,$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 78\cdot\sin\frac{\pi}{3}=2127.82,$$

$$\frac{\delta s}{S}=\frac{27.55}{2127.82}=1.29\%,$$

所以三角形面积的近似值为 $2127.82\mathrm{m}^2$，绝对误差为 $27.55\mathrm{m}^2$，相对误差为 1.29%.

*13．利用全微分证明：乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和；商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和.

**证明**：设 $u=xy$，$v=\dfrac{x}{y}$，则 $\Delta u\approx \mathrm{d}u=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,$

$$\Delta v\approx \mathrm{d}v=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2},$$

由此可得相对误差；

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right|\approx\left|\frac{\mathrm{d}u}{u}\right|=\left|\frac{y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{xy}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right|+\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|;$$

$$\left|\frac{\Delta v}{v}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}v}{v}\right|=\left|\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2\cdot\frac{x}{y}}\right|=\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|\leqslant\left|\frac{\mathrm{d}x}{x}\right|+\left|\frac{\mathrm{d}y}{y}\right|=\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

## 9.1.6　练习题

1．选择题

（1）二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 的值为（　　）

A．0　　B．1　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．不存在

（2）考察下列命题

① 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处两个偏导数都存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续；

② 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处两个偏导数都存在；

③ 函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $(x_0,y_0)$ 处都连续，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微；

④ 函数 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处两阶混合偏导数都存在，则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

错误的命题是（　　）

A．①②　　B．②③　　C．③④　　D．①④

（3）设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在(0,0)连续且 $\varphi(0,0)=0$，则

A．$f(x,y)$ 在（0,0）处连续，$f_x(0,0), f_y(0,0)$ 不存在.

B．$f(x,y)$ 在（0,0）处连续，$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微.

C．$f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在，$f(x,y)$ 在（0,0）处不可微.

D．$f(x,y)$ 在（0,0）处可微.

2．填空题

（1）函数 $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ 的定义域为________.

（2）若 $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{3xy}$，则 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$ = ________.

3．求下列各极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$；

（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{\sin\left(x\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\ln(1+xy)}$；

（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$；

（4）$\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

4．证明二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x+y+1}-1}$ 不存在.

5．设函数 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中函数 $\varphi(x,y)$ 在(0,0)的某邻域内连续，试问：（1）在什么条件下，偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在；（2）在什么条件下，将函数 $f(x,y)$ 在点（0,0）处可微？

## 习题答案

1．（1）D　　（2）D　　（3）D

2．（1）$\{(x,y)\mid x^2+y^2>1\}$　　（2）$\dfrac{x^2+y^2}{3xy}$

3．（1）0　　（2）1　　（3）0　　（4）0　　（5）1

5．当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在点（0,0）处可微且 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 存在.

## 9.1.7　考研真题

【例 1】（2002 年数一）　考虑二元函数 $f(x,y)$ 的四条性质：

① $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处连续，　　② $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的一阶偏导数连续,

③ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处可微，　　④ $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处的一阶偏导数存在.

则有（　　）

A．②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①　　B．③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①

C．③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①　　D．③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④

解：应选 A

这是讨论函数 $f(x,y)$ 的连续性、可偏导性、可微性及偏导数的连续性之间的关系．因为 $f(x,y)$ 的两个偏导数连续是可微的充分条件，若 $f(x,y)$ 可微则必连续，因此应选 A.

【例 2】（2008 年数三）　已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$ ，则（　　）

A．$f_x'(0,0)$ ，$f_y'(0,0)$ 都存在

B．$f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

C．$f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

D．$f_x'(0,0)$ ，$f_y'(0,0)$ 都不存在

解：应选 B

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+0^4}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}=1\text{，}\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x}=-1$$

故 $f_x'(0,0)$ 不存在.

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{0^2+y^4}}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0$$

所以 $f_y'(0,0)$ 存在．故选 B.

【例 3】（2012 年数一）　如果 $f(x,y)$在(0,0)处连续，那么下列命题正确的是（　　）

A．若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$在(0,0)处可微

B．若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$在(0,0)处可微

C．若 $f(x,y)$在(0,0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

D．若 $f(x,y)$在(0,0)处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

解：应选 B

由于 $f(x,y)$在(0,0)处连续，可知如果 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则必有 $f(0,0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$ ，这样，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 就可以写成 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ ，也即极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 存在，由此可知 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$ ，即 $f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$ ．由可微的定义可知 $f(x,y)$在(0,0)处可微，故选 B.

# 9.2 多元函数的微分法

## 9.2.1 基本要求

1．掌握复合函数微分法，会求复合函数的二阶偏导数.

2．了解隐函数存在定理，会求多元隐函数的偏导数.

## 9.2.2 基本内容

### 1．复合函数微分法

（1）复合函数的中间变量均为一元函数的情形——全导数

如果函数 $u=\varphi(t)$及 $v=\psi(t)$都在点 $t$ 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点 $t$ 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

（2）复合函数的中间变量均为多元函数的情形

如果函数 $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$都在点$(x,y)$具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

（3）复合函数的中间变量既有一元函数，又有多元函数的情形

如果函数 $u=\varphi(x,y)$在点$(x,y)$具有对 $x$ 及对 $y$ 的偏导数，函数 $v=\psi(y)$在点 $y$ 可导，函数 $z=f(u,v)$在对应点$(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

### 2．隐函数存在定理

（1）隐函数存在定理 1

设函数 $F(x,y)$在点 $P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$, $F_y(x_0,y_0)\neq0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点$(x_0,y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

（2）隐函数存在定理 2

设函数 $F(x,y,z)$在点 $P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq0$，则方程 $F(x,y,z)=0$ 在点$(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$，它满足条件 $z_0=f(x_0,y_0)$，并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

（3）隐函数存在定理 3

设 $F(x, y, u, v)$、$G(x, y, u, v)$在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$的某一邻域内具有对各个变量的连续偏导数，又 $F(x_0, y_0, u_0, v_0)=0,\ G(x_0, y_0, u_0, v_0)=0$，且偏导数所组成的函数行列式：

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$不等于零，则方程组 $F(x, y, u, v)=0,\ G(x, y, u, v)=0$ 在点 $P(x_0, y_0, u_0, v_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $u=u(x, y),\ v=v(x, y)$，它们满足条件 $u_0=u(x_0, y_0),\ v_0=v(x_0, y_0)$，并有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}.$$

注：常称 $J$ 为雅可比行列式.

## 9.2.3　典型例题

**【例 1】** 设 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

**解**：由 $z=(x+\mathrm{e}^y)^x$，故 $z(x,0)=(x+1)^x$，因此

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\left[(x+1)^x\right]'=\left[\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\right]'=\mathrm{e}^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]$$

代入 $x=1$ 得，$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=e^{\ln 2}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+1$.

**【例 2】** 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

**解：** 把点(1,2)代入 $(z+y)^x=xy$，得 $(z+2)^1=2$，则 $z(1,2)=0$

在方程 $(z+y)^x=xy$ 两边同时对 $x$ 求偏导数，有

$$(z+y)^x\left[\ln(z+y)+x\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+y}\right]=y$$

代入相应数值得
$$2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2$$

解得
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=2(1-\ln 2).$$

**评注：** 例 1 与例 2 均是求偏导数值. 例 1 为显函数，因此可直接将另外一个变量的数值代入使之变为一元函数而直接求全导数. 例 2 为隐函数，则需要注意将变量值代入求出对应的函数值.

**【例 3】** 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^5-xz^4+yz^3=1$ 确定的隐函数，求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

**解：** 将方程两边对 $x$ 求偏导数，得

$$5z^4\frac{\partial z}{\partial x}-z^4-4xz^3\frac{\partial z}{\partial x}+3yz^2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{1}$$

再将方程两边对 $y$ 求偏导数，得

$$5z^4\frac{\partial z}{\partial y}-4xz^3\frac{\partial z}{\partial y}+z^3+3yz^2\frac{\partial z}{\partial y}=0 \tag{2}$$

将（1）式两端对 $y$ 求偏导数，得

$$(20z^3-12xz^2+6yz)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+(5z^4-4xz^3+3yz^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-4z^3\frac{\partial z}{\partial y}+3z^2\frac{\partial z}{\partial x}=0 \tag{3}$$

将 $x=0,y=0$ 代入原方程，得 $z\big|_{(0,0)}=1$. 再将 $x=0,y=0,z=1$ 代入（1）、（2）式得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\frac{1}{5},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{5}.$$

再代入（3）式，得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{3}{25}$.

**【例 4】** 设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

**解：** 由已知条件可得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^2}f''\left(\frac{x}{y}\right),$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

**【例 5】**设$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且满足$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又$g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$，求$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

分析：本题是典型的复合函数求偏导问题：$g=f(u,v)$，$u=xy,v=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$，直接利用复合函数求偏导公式即可，注意利用$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}$.

**解：**

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$=x^2+y^2.$$

**【例 6】**已知函数$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值，$z=f[(x+y),f(x,y)]$. 求$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

**解：**因为$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值，故$f_1(1,1)=0,f_2(1,1)=0$

而$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1[(x+y),f(x,y)]+f_2[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1(x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_{11}[(x+y),f(x,y)]+f_{12}[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2(x,y)\\&\quad+f_{21}[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1(x,y)+f_{22}[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2(x,y)\cdot f_1(x,y)\\&\quad+f_2[(x+y),f(x,y)]\cdot f_{12}(x,y)\end{aligned}$$

故 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}(2,2)+f_2(2,2)\cdot f_{12}(1,1)$

**评注**：本题需注意利用极值的条件.

**【例 7】** 设 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)+\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\varphi(u)$ 具有二阶连续的导数, 求$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

**解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)+xf'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)+\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{y}{x^2}\right)=f\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x}f'\left(\dfrac{y}{x}\right)-\dfrac{y}{x^2}\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+2\frac{y}{x^3}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\&=\frac{y^2}{x^3}f''+2\frac{y}{x^3}\varphi'+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x^3}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\\&=-\frac{y}{x^2}f''-\frac{1}{x^2}\varphi'-\frac{y}{x^3}\varphi''\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x}f''+\frac{1}{x^2}\varphi''$$

于是

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\&=\frac{y^2}{x}f''+\frac{2y}{x}\varphi'+\frac{y^2}{x^2}\varphi''-2\frac{y^2}{x}f''-\frac{2y}{x}\varphi'-\frac{2y^2}{x^2}\varphi''+\frac{y^2}{x}f''+\frac{y^2}{x^2}\varphi''=0\end{aligned}$$

**【例 8】** 设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$是由方程组

$$\begin{cases}x=u\cos\dfrac{v}{u}\\[2mm] y=u\sin\dfrac{v}{u}\end{cases}$$

所确定的 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$的反函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

**解法一**：利用隐函数求导公式，记 $F(x,y,u,v)=x-u\cos\dfrac{v}{u}$， $G(x,y,u,v)=y-u\sin\dfrac{v}{u}$. 则

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u}&\dfrac{\partial F}{\partial v}\\[2mm]\dfrac{\partial G}{\partial u}&\dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\cos\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}&\sin\dfrac{v}{u}\\[2mm]-\sin\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}&-\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \sin\dfrac{v}{u}\\ 0 & -\cos\dfrac{v}{u}\end{vmatrix}=-\cos\frac{v}{u}$$

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial x}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\cos\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u} & 1\\ -\sin\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u} & 0\end{vmatrix}=\sin\frac{v}{u}-\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}$$

因此，
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=\cos\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u},$$

同理，
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=\sin\frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}.$$

**解法二：**将所给方程两端对 $x$ 求偏导数，得

$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=1\\ \left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cos\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

解得，$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos\dfrac{v}{u}$， $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}-\sin\dfrac{v}{u}$.

同理，将所给方程两端对 $y$ 求偏导数，得

$$\begin{cases}\left(\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}-\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\\ \left(\sin\dfrac{v}{u}-\dfrac{v}{u}\cos\dfrac{v}{u}\right)\dfrac{\partial u}{\partial y}+\cos\dfrac{v}{u}\dfrac{\partial v}{\partial y}=1\end{cases}$$

解得，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\sin\dfrac{v}{u}$， $\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}$.

**解法三：** 由一阶全微分的形式不变性，得

$$\mathrm{d}x=\cos\frac{v}{u}\mathrm{d}u-u\sin\frac{v}{u}\cdot\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}$$

$$\mathrm{d}y=\sin\frac{v}{u}\mathrm{d}u+u\cos\frac{v}{u}\cdot\frac{u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u}{u^2}$$

联立解得，$\mathrm{d}u=\cos\frac{v}{u}\mathrm{d}x+\sin\frac{v}{u}\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=\left(\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}x+\left(\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\right)\mathrm{d}y$.

因此，$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\frac{v}{u}$，$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{v}{u}\cos\frac{v}{u}-\sin\frac{v}{u}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\frac{v}{u}$，$\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\frac{v}{u}+\frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}$.

**评注：** 若题目改为求 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}v$，解法三则是最方便的.

**【例 9】** 设 $\begin{cases}u=f(x-ut,y-ut,z-ut),\\ g(x,y,z)=0.\end{cases}$ 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

**解法一：** 这里有变量 $x, y, z, u, t$ 构成的两个方程，所以可以确定两个因变量，三个自变量. 按题意，$u$ 是因变量，$x, y$ 是自变量，$t$ 与 $z$ 中哪个是自变量呢？由第二个方程来看，$z$ 应该是因变量. 因此可以确定 $x, y, t$ 为自变量，$u, z$ 为因变量. 于是将方程组对 $x$ 求偏导可得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1\left(1-t\frac{\partial u}{\partial x}\right)-f_2\frac{\partial u}{\partial x}t+f_3\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}t\right)\\ \frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}[1+t(f_1+f_2+f_3)]=f_1+f_3\frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial g}{\partial x}\Big/\frac{\partial g}{\partial z}\end{cases},$$

解得
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_1\frac{\partial g}{\partial z}-f_3\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}[1+t(f_1+f_2+f_3)]}.$$

同理，将方程组对 $y$ 求偏导最终可解得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_2\frac{\partial g}{\partial z}-f_3\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}[1+t(f_1+f_2+f_3)]}$.

**解法二：** 利用一阶全微分的形式不变性，对第一个方程求全微分得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f_1\mathrm{d}(x-ut)+f_2\mathrm{d}(y-ut)+f_3\mathrm{d}(z-ut)\\&=f_1(\mathrm{d}x-u\mathrm{d}t-t\mathrm{d}u)+f_2(\mathrm{d}y-u\mathrm{d}t-t\mathrm{d}u)+f_3(\mathrm{d}z-u\mathrm{d}t-t\mathrm{d}u)\end{aligned}$$

整理得 $$[1+t(f_1+f_2+f_3)]\mathrm{d}u=f_1\mathrm{d}x+f_2\mathrm{d}y+f_3\mathrm{d}z-u(f_1+f_2+f_3)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$

对题设中第二个方程求全微分得 $g_1\mathrm{d}x+g_2\mathrm{d}y+g_3\mathrm{d}z=0$，解得

$$\mathrm{d}z=-\frac{1}{g_3}(g_1\mathrm{d}x+g_2\mathrm{d}y)$$

将上式代入(*)，得

$$[1+t(f_1+f_2+f_3)]\mathrm{d}u = f_1\mathrm{d}x + f_2\mathrm{d}y - \frac{f_3}{g_3}(g_1\mathrm{d}x + g_2\mathrm{d}y) - u(f_1+f_2+f_3)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{f_1g_3 - f_3g_1}{g_3}\mathrm{d}x + \frac{f_2g_3 - f_3g_2}{g_3}\mathrm{d}y - u(f_1+f_2+f_3)\mathrm{d}t$$

因此，$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{f_1g_3 - f_3g_1}{g_3[1+t(f_1+f_2+f_3)]}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{f_2g_3 - f_3g_2}{g_3[1+t(f_1+f_2+f_3)]}$.

**评注**：用复合函数求导法求解时，常犯以下错误：

$$\frac{\partial(x-ut)}{\partial x} = 1, \frac{\partial(y-ut)}{\partial x} = 0, \frac{\partial(z-ut)}{\partial x} = 0 .$$

因为这里 $u, z$ 不是自变量，它是 $x, y, t$ 的函数，因此正确的结果应该是：

$$\frac{\partial(x-ut)}{\partial x} = 1 - t\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial(y-ut)}{\partial x} = -t\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial(z-ut)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - t\frac{\partial u}{\partial x} .$$

其次，隐函数偏导数的计算完全归结为复合函数求偏导，计算前，首先要明确函数关系：哪些是自变量，哪些是因变量. 一般地，有几个方程就确定几个因变量，其余的都是自变量. 至于哪些是因变量或自变量，这可由题目本身的分析确定.

## 9.2.4　疑难释疑

1．如何才能正确掌握多元复合函数的求导法则？

答：多元复合函数的求导法则，虽然因复合情形不同，造成求导公式形式各异，但其本质特征是一致的. 掌握了求导公式的本质特征，就能正确地运用于各种情形. 关键就在于弄清函数的复合结构，哪些是中间变量，哪些是自变量，先确定好自变量个数，再由题设确定出因变量. 为了直观地显示变量之间的复合结构，可用变量关系图（如图 9-2-1）来表示出因变量 $z$ 经过中间变量 $u$，$v$ 再通向自变量 $x$，$y$ 的各条途径：

通过变量关系图，以及口诀“连线相乘，分线相加”就可以得到多元复合函数的微分公式. 按照这个标准，可以将多元复合函数的求导法则推广至 $m$ 个中间变量、$n$ 个自变量的情形（如图 9-2-2）：

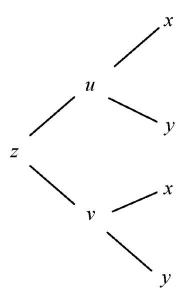



图 9-2-1

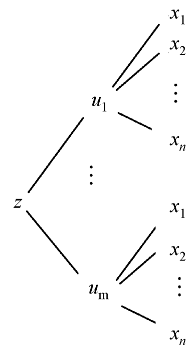



图 9-2-2

设函数 $z = f(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ 具有连续偏导数，而 $u_i = \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 可偏导，则复合函数 $z = f[\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, \varphi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$ 具有偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x_j}=\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_j}+\frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_j}+\cdots+\frac{\partial z}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

2．求隐函数的导数或偏导数，有哪些方法？

答：通常有三种方法．一是利用隐函数求导公式；二是对所给方程（组）两端求导，再解出所求的导数或偏导数；三是利用全微分．要注意这三种方法的区别．利用方法一求 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数时，是利用 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$ 与 $F_x$、$F_y$、$F_z$ 之间的联系进行计算，在计算 $F_x$、$F_y$、$F_z$ 时，$F(x,y,z)$ 中的 $x,y,z$ 都视为自变量；方法二则看作是把隐函数 $z=f(x,y)$ 代入方程 $F(x,y,z)=0$ 以后，再对等式 $F(x,y,f(x,y))=0$ 两端关于 $x$ 或 $y$ 求导，此时要把 $F(x,y,z)$ 中的 $z$ 看作 $x$ 和 $y$ 的函数；方法三则应用多元函数全微分的表达式．当计算出函数的全微分以后，同时便得到了两个（或多个）一阶偏导数（参阅典型例题例 8）．

3．求隐函数的二阶偏导数，用什么方法比较简便？

答：以 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 为例进行讨论（假设 $F$ 具有二阶连续偏导数）．求隐函数的二阶偏导数，常用方法有两种．

方法一　先求出一阶偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\qquad (F_z\neq 0)\,,$$

再对 $x$ 求偏导，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-\frac{F_z\frac{\partial F_x}{\partial x}-F_x\frac{\partial F_z}{\partial x}}{F_z^2}\\&=-\frac{F_z\left(F_{xx}+F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)-F_x\left(F_{zx}+F_{zz}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{F_z^2}\\&=-\frac{1}{F_z^3}(F_{xx}F_z^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}F_x^2)\end{aligned}$$

类似地，可得 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

方法二　直接对原方程两端求导两次．对 $x$ 求导一次，得

$$F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0\,,\tag{1}$$

再对 $x$ 求导，得

$$F_{xx}+2F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F_z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\,.\tag{2}$$

解得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=-\frac{1}{F_z}\left[F_{xx}+2F_{xz}\frac{\partial z}{\partial x}+F_{zz}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\\&=-\frac{1}{F_z^3}(F_{xx}F_z^2-2F_{xz}F_xF_z+F_{zz}F_x^2).\end{aligned}$$

这两种方法，在一般情况下，利用方法二比较简便，因为可避免商的求导运算. 特别在求指定点$(x_0,y_0)$处的二阶偏导数时，只需将$(x_0,y_0,z_0)$代入（1），得出$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$；再将$(x_0,y_0,z_0)$及$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$代入（2），便可求得$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，类似地，可求得其他几个二阶偏导数（参阅典型例题例 3）.

## 9.2.5　部分习题解答

【习题 9-4】

2．设$z=u^2\ln v$，而$u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}(-2)=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}.$$

4．设$z=\arcsin(x-y)$，而$x=3t, y=4t^3$，求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

解：
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{-1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2$$
$$=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}.$$

6．设$u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而$y=a\sin x, z=\cos x$，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解：
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{a\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$
$$=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+1}(a^2\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)=e^{ax}\sin x.$$

8．求下列函数的一阶偏导数（其中$f$具有一阶连续偏导数）：

（2）$u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$；

解：
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right)=\frac{1}{y}f_1',$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right)=-\frac{x}{y^2}f_1'+\frac{1}{z}f_2',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_1'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{z}\right)=-\frac{y}{z^2}\cdot f_2'.$$

（3）$u=f(x, xy, xyz)$.

解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3',$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'.$$

10．设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(u)$为可导函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

**证明：**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-y\cdot f'\cdot 2x}{f^2(u)}=\frac{-2xyf'}{f^2(u)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(u)-y\cdot f'\cdot(-2y)}{f^2(u)}=\frac{1}{f(u)}+\frac{-2y^2f'}{f^2(u)},$$

所以

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2yf'}{f^2(u)}+\frac{2yf'}{f^2(u)}+\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{f(u)}=\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{\frac{y}{z}}=\frac{z}{y^2}.$$

12．求下列函数的$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$（其中 $f$ 具有二阶连续偏导数）:

（2）$z=f\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$;

解：令 $u=x$, $v=\dfrac{x}{y}$，则 $z=f(u, v)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}.$$

因为 $f(u, v)$是 $u$ 和 $v$ 的函数，所以$\dfrac{\partial f}{\partial u}$和$\dfrac{\partial f}{\partial v}$也是 $u$ 和 $v$ 的函数，从而$\dfrac{\partial f}{\partial u}$和$\dfrac{\partial f}{\partial v}$是以 $u$ 和 $v$ 为中间变量的 $x$ 和 $y$ 的函数.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{2}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$=-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^3}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2x}{y^3}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

（4）$z=f(\sin x, \cos y, \mathrm{e}^{x+y})$.

**解：** $z_x=f_1'\cdot\cos x+f_3'\cdot\mathrm{e}^{x+y}=\cos x\, f_1'+\mathrm{e}^{x+y}f_3'$,

$z_y=f_2'\cdot(-\sin y)+f_3'\cdot\mathrm{e}^{x+y}=-\sin y\, f_2'+\mathrm{e}^{x+y}f_3'$,

$z_{xx}=-\sin x\, f_1'+\cos x\cdot(f_{11}''\cdot\cos x+f_{13}''\cdot\mathrm{e}^{x+y})+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}(f_{31}''\cdot\cos x+f_{33}''\cdot\mathrm{e}^{x+y})$

$=-\sin x\, f_1'+\cos^2 x\, f_{11}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos x\, f_{13}''+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}\cos x\, f_{31}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''$

$=-\sin x\, f_1'+\cos^2 x\, f_{11}''+2\mathrm{e}^{x+y}\cos x\, f_{13}''+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''$,

$z_{xy}=\cos x[f_{12}''\cdot(-\sin y)+f_{13}''\cdot\mathrm{e}^{x+y}]+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}[f_{32}''\cdot(-\sin y)+f_{33}''\cdot\mathrm{e}^{x+y}]$

$=-\sin y\cos x\, f_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos x\, f_{13}'+\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\mathrm{e}^{x+y}\sin y\, f_{32}'+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}'$

$=-\sin y\cos x\, f_{12}''+\mathrm{e}^{x+y}\cos x\, f_{13}''-\mathrm{e}^{x+y}\sin y\, f_{32}''+\mathrm{e}^{2(x+y)}f_{33}''+\mathrm{e}^{x+y}f_3'$,

$z_{yy}=-\cos y\, f_2'-\sin y[f_{22}''\cdot(-\sin y)+f_{23}''\cdot\mathrm{e}^{x+y}]+\mathrm{e}^{x+y}f_3'+\mathrm{e}^{x+y}[f_{32}''\cdot(-\sin y)+f_{33}''\cdot\mathrm{e}^{x+y}]$

$=-\cos y\, f_2'+\sin^2 y\, f_{22}''-\mathrm{e}^{x+y}\sin y\, f_{23}''+\mathrm{e}^{x+y}f_3'-\mathrm{e}^{x+y}\sin y\, f_{32}''+f_{33}''\cdot\mathrm{e}^{2(x+y)}$

$=-\cos y\, f_2'+\sin^2 y\, f_{22}''-2\mathrm{e}^{x+y}\sin y\, f_{23}''+f_{33}''\cdot\mathrm{e}^{2(x+y)}+\mathrm{e}^{x+y}f_3'$.

*13．设 $u=f(x, y)$ 的所有二阶偏导数连续，而 $x=\dfrac{s-\sqrt{3}t}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}s+t}{2}$，证明：$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2$ 及 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

**证明：** 因为

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\\&=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\\&=\frac{3}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\end{aligned}$$

所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

【习题 9-5】

4．设 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$，

解：令 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}$，则

$$F_x=\frac{1}{z},$$

$$F_y=-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\left(-\frac{z}{y^2}\right)=\frac{1}{y},$$

$$F_z=-\frac{x}{z^2}-\frac{1}{\frac{z}{y}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{x+z}{z^2},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}.$$

*9．设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$．

**解**：令 $F(x, y, z) = z^3-3xyz-a^3$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-3yz}{3z^2-3xy} = \frac{yz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-3xz}{3z^2-3xy} = \frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)$$

$$= \frac{\left(z+y\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2-xy)-yz\left(2z\dfrac{\partial z}{\partial y}-x\right)}{(z^2-xy)^2}$$

$$= \frac{\left(z+y\dfrac{xz}{z^2-xy}\right)\cdot(z^2-xy)-yz(2z\dfrac{xz}{z^2-xy}-x)}{(z^2-xy)^2}$$

$$= \frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$$

10．求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

（2）设 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$；

**解**：视 $x = x(z), y = y(z)$，方程两边对 $z$ 求导得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+1=0 \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+2z=0 \end{cases}，即 \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-1 \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-2z \end{cases}.$$

解方程组得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{y-z}{x-y},\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{z-x}{x-y}.$$

（3）设 $\begin{cases} u = f(ux, v+y) \\ v = g(u-x, v^2y) \end{cases}$，其中 $f, g$ 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$；

**解**：视 $u = u(x, y), v = v(x, y)$，方程两边对 $x$ 求偏导得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = f_1'\cdot\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = g_1'\cdot\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)+2g_2'\cdot yv\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} (xf_1'-1)\dfrac{\partial u}{\partial x}+f_2'\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = -uf_1' \\ g_1'\dfrac{\partial u}{\partial x}+(2yvg_2'-1)\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} = g_1' \end{cases}.$$

解之得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}{(xf'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'g_1'}.$$

（4）设$\begin{cases}x=\mathrm{e}^u+u\sin v\\ y=\mathrm{e}^u-u\cos v\end{cases}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

**解：** 视 $u=u(x,y), v=v(x,y)$，方程两边微分得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u+\sin v\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u-\cos v\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}(\mathrm{e}^u+\sin v)\mathrm{d}u+u\cos v\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\\ (\mathrm{e}^u-\cos v)\mathrm{d}u+u\sin v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y\end{cases},$$

从中解出 $\mathrm{d}u, \mathrm{d}v$ 得

$$\mathrm{d}u=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\mathrm{d}x+\frac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\mathrm{d}x+\frac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}\mathrm{d}y,$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\sin v+\mathrm{e}^u}{u[\mathrm{e}^u(\sin v-\cos v)+1]}.$$

11．设 $y=f(x,t)$，而 $t$ 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 $x,y$ 的函数，其中 $f,F$ 都具有一阶连续偏导数，试证明：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}+\dfrac{\partial F}{\partial t}}.$$

**证明：** 由方程组$\begin{cases}y=f(x,t)\\ F(x,y,t)=0\end{cases}$可确定两个一元隐函数$\begin{cases}y=y(x)\\ t=t(x)\end{cases}$，方程两边对 $x$ 求导可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0\end{cases},$$

移项得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\partial F}{\partial t}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}\end{cases},$$

在 $D=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-\partial f}{\partial t} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix}=\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$ 的条件下

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{D}\cdot\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & -\dfrac{\partial f}{\partial t} \\ -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial t} \end{vmatrix}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial t}-\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial t}+\dfrac{\partial f}{\partial t}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial y}}.$$

## 9.2.6　练习题

1．选择题：

（1）设函数 $z=x^y$，则 $\mathrm{d}z=$（　　）.

A．$yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$　　B．$yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\mathrm{d}y$

C．$x^y\mathrm{d}x+x^y\ln x\mathrm{d}y$　　D．$yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y\ln y\mathrm{d}y$

（2）设 $z=f(u,v)$，其中 $u=\mathrm{e}^{-x}$, $v=x+y$，下面运算中（　　）

$I:\dfrac{\partial z}{\partial x}=-e^{-x}\dfrac{\partial f}{\partial u}+\dfrac{\partial f}{\partial v}$　，$II:\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

A．$I$, $II$ 都不正确　　B．$I$ 正确，$II$ 不正确

C．$I$ 不正确，$II$ 正确　　D．$I$, $II$ 都正确

2．填空题：

（1）设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

（2）设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________.

（3）设 $z=\int_0^{x^2y}f(t,\mathrm{e}^t)\mathrm{d}t$，其中 $f$ 是二元连续函数，则 $\mathrm{d}z=$ ________.

（4）设二元函数 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,0)}=$________.

3．设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$，其中 $\varphi$ 为可微函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4．求下列方程所确定函数的全微分：

（1）$f(x+y,y+z,z+x)=0$，求 $\mathrm{d}z$；

（2）$z=f(xz,\ z-y)$，求 $\mathrm{d}z$.

5．已知 $z=f(x\ln y,x-y)$，求 $z_{xx},z_{xy},z_{yy}$

6．设 $z=f[x^2-y,\varphi(xy)]$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$\varphi(u)$ 二阶可导，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

7．设 $y=y(x)$，$z=z(x)$，由 $\begin{cases} x+y+z+z^2=0 \\ x+y^2+z+z^3=0 \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

8．设 $u=f(x,y,z,t)$ 关于各变量均有连续偏导数，而其中由方程组

$$\begin{cases} y^2+yz-zt^2=0 \\ te^z+z\sin t=0 \end{cases}$$

确定 $z, t$ 为 $y$ 的函数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

9．设 $u=u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续，且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ , $u(x,2x)=x, u_x(x,2x)=x^2$ ，试求 $u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$ .

10．设函数 $\varphi(x),\psi(x)$ 具有二阶连续导数，并设 $u(x,y)=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$ ，试证：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

## 习题答案

1．（1）A　　（2）B

2．（1） $f_1\cdot yx^{y-1}+f_2\cdot y^x\ln y$　　（2）0

（3） $f(x^2y,\mathrm{e}^{x^2y})(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)$　　（4） $2e\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$

3． $\dfrac{y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\dfrac{z}{y}\right)}$

4．（1） $-\dfrac{(f_1+f_3)\mathrm{d}x+(f_1+f_2)\mathrm{d}y}{f_2+f_3}$　　（2） $\dfrac{zf_1\mathrm{d}x-f_2\mathrm{d}y}{1-xf_1-f_2}$

5． $z_{xx}=f_{11}\ln^2 y+2f_{12}\ln y+f_{22}$

$$z_{xy}=\frac{x\ln y}{y}f_{11}+\left(\frac{x}{y}-\ln y\right)f_{12}-f_{22}+\frac{1}{y}f_1$$

$$z_{yy}=\frac{x^2}{y^2}f_{11}-\frac{2x}{y}f_{12}+f_{22}-\frac{x}{y^2}f_1$$

6． $(\varphi'+xy\varphi'')f_2-2xf_{11}+(2x^2-y)\varphi' f_{12}+xy(\varphi')^2 f_{22}$

7． $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2z-3z^2}{1+3z^2-2y-4yz}$ , $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y-1}{1+3z^2-2y-4yz}$

8． $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{2y+z}{(y-t^2)(\mathrm{e}^z+z\cos t)+2zt(t\mathrm{e}^z+\sin t)}\left[\frac{\partial f}{\partial t}(t\mathrm{e}^z+\sin t)-\frac{\partial f}{\partial z}(\mathrm{e}^z+z\cos t)\right]$$

9． $u_{xx}(x,2x)=2x, u_{xy}(x,2x)=-\dfrac{4}{3}x, u_{yy}(x,2x)=\dfrac{5}{3}x$

## 9.2.7　考研真题

【例 1】（2010 年数一）　设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 $F$ 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$________

A．$x$　　　　B．$z$

C．$-x$　　　　D．$-z$

解：应选（B）

方程两边对 $x$ 求偏导，得 $-\dfrac{y}{x^2}F_1'+\dfrac{x\dfrac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}F_2'=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{xF_2'}(yF_1'+zF_2')$；

方程两边对 $y$ 求偏导，得 $\dfrac{1}{x}F_1'+\dfrac{1}{x}F_2'\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，解得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_1'}{F_2'}$；

因此，$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{F_2'}(yF_1'+zF_2')-y\dfrac{F_1'}{F_2'}=z$，故应选（B）

【例 2】（2005 年数一）　设有三元方程 $xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0, 1, 1)$的一个邻域，在此邻域内该方程（　　）

A．只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

B．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y, z)$和 $z=z(x, y)$.

C．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x, z)$和 $z=z(x, y)$.

D．可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y, z)$和 $y=y(x, z)$.

解：应选（D）

令 $F(x, y, z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则

$$F_x'=y+\mathrm{e}^{xz}z，\quad F_y'=x-\frac{z}{y}，\quad F_z'=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}x，$$

且 $F_x'(0,1,1)=2$，$F_y'(0,1,1)=-1$，$F_z'(0,1,1)=0$．由此可确定相应的隐函数 $x=x(y, z)$和 $y=y(x, z)$. 故应选（D）.

【例 3】（2005 年数一）　设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数 $\varphi$ 具有二阶导数，$\psi$ 具有一阶导数，则必有

A．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　　　B．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

C．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　　　D．$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

解：因为
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)，$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)，$$

于是
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\phi''(x+y)-\phi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$
可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选（B）.

【例 4】（2011 年数一） 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________

解：应填 4.

因为 $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{y\sin xy}{1+x^2y^2},\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}=\frac{y^2\cos xy(1+x^2y^2)-2xy^3\sin xy}{(1+x^2y^2)^2}$，故 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=4$.

【例 5】（2011 年数三） 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=$ ________.

解：应填 $2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x-2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=\left.\frac{\mathrm{d}(1+x)^x}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=(\mathrm{e}^{x\ln(1+x)})'\big|_{x=1}=(\mathrm{e}^{x\ln(1+x)})\big|_{x=1}\cdot\left.\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right]\right|_{x=1}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}=\frac{\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}}{\mathrm{d}y}=\left.\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{y}}\right]'\right|_{y=1}=\left.\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{y}}\right]\right|_{y=1}\cdot\left.\left[\frac{\frac{y\cdot\frac{-1}{y^2}}{1+\frac{1}{y}}-\ln\left(1+\frac{1}{y}\right)}{y^2}\right]\right|_{y=1}=2\left(\frac{-1}{2}-\ln 2\right)$$

因此，$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x-2\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y$

【例 6】（2009 年数一）设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

解：应填 $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+yx\cdot f''_{22}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$$

【例 7】（2012 年数三）函数 $z=f(x,y)$，满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

解：应填 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

令 $\rho=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$.

则 $f(x,y)-2x+y-2=o(\rho), f(0,1)=1$

$$f(x,y)-1=2x-(y-1)+o(\rho)$$

$$f_x(0,1)=2, f_y(0,1)=-1$$

因此 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$

**【例 8】**（2004 年数三） 设函数 $f(u, v)$由关系式 $f[xg(y), y]=x+g(y)$确定，其中函数 $g(y)$可微，且 $g(y)\neq 0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.

**解**：应填 $-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$

令 $u=xg(y)$，$v=y$，则 $f(u, v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，

所以，$\dfrac{\partial f}{\partial u}=\dfrac{1}{g(v)}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$.

**【例 9】**（2001 年数一）设函数 $z=f(x,y)$ 在点(1, 1)可微，且 $f(1,1)=1, f_x'(1,1)=2, f_y'(1,1)=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$.

**解**：由题设 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$，而求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)|_{x=1}=3\varphi^2(1)\varphi'(1)=3\varphi'(1)$，归结为求 $\varphi'(1)$. 由复合函数求导法：

$$\varphi'(x)=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,x),$$

$$\varphi'(1)=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)].$$

注意
$$f_1'(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=2,\ f_2'(1,1)=\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=3.$$

因此
$$\varphi'(1)=2+3(2+3)=17,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)|_{x=1}=3\times 17=51.$$

**【例 10】**（2011 年数一）设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 $f$ 具有二阶连续的偏导数，函数 $g(x)$可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}$

**解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))y+f_2'(xy,yg(x))yg'(x)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(xy,yg(x))xy+f_{12}''(xy,yg(x))yg(x)+f_1'(xy,yg(x))$$
$$+f_{21}''(xy,yg(x))xyg'(x)+f_{22}''(xy,yg(x))yg(x)g'(x)+f_2'(xy,yg(x))g'(x)$$

由于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，可知 $g'(1)=0$.

故

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_{11}''(1,g(1))+f_{12}''(1,g(1))g(1)+f_1'(1,g(1))+f_{21}''(1,g(1))g'(1)$$
$$+f_{22}''(1,g(1))g(1)g'(1)+f_2'(1,g(1))g'(1)=f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1)+f_1'(1,1)$$

**【例 11】**（2008 年数三） 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 $\varphi$ 具有二阶导数且 $\varphi'\neq -1$.

（Ⅰ）求 $\mathrm{d}z$

（Ⅱ）记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

**解：**（Ⅰ）$2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'(x+y+z)\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$

$$\Rightarrow (\varphi'+1)\mathrm{d}z=(-\varphi'+2x)\mathrm{d}x+(-\varphi'+2y)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{(-\varphi'+2x)\mathrm{d}x+(-\varphi'+2y)\mathrm{d}y}{\varphi'+1}\ (\because \varphi'\neq -1)$$

（Ⅱ）由上一问可知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}$，

所以 $$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}\right)=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{-2y+2x}{\varphi'+1}=\frac{2}{\varphi'+1}$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''\left(1+\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right)}{(\varphi'+1)^2}=-\frac{2\varphi''(1+\varphi'+2x-\varphi')}{(\varphi'+1)^3}=-\frac{2\varphi''(1+2x)}{(\varphi'+1)^3}.$$

**【例 12】**（2001 年数一） 设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

（1）验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$.

（2）若 $f(1)=0,f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

**解：**（1）设 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+f'(u)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=f''(u)\cdot\frac{x^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}+f'(u)\cdot\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

将 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 得

$$f''(u)+\frac{f'(u)}{u}=0.$$

（2）令 $f'(u)=p$，则 $p'+\dfrac{p}{u}=0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=-\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$，两边积分得

$$\ln p=-\ln u+\ln C_1\text{，即 }p=\frac{C_1}{u}\text{，亦即 }f'(u)=\frac{C_1}{u}.$$

由 $f'(1)=1$ 可得 $C_1=1$．所以有 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$，两边积分得

$$f(u)=\ln u+C_2,$$

由 $f(1)=0$ 可得 $C_2=0$，故 $f(u)=\ln u$．

**评注**：本题是多元函数微分与常微分方程的综合题.

# 9.3　多元函数微分学的几何应用、极值

## 9.3.1　基本要求

1．理解空间曲线的切线与法平面以及曲面的切平面与法线的概念，会求它们的方程.

2．理解多元函数极值与条件极值的概念，掌握多元函数极值存在的必要条件，了解二元函数极值存在的充分条件，会求二元函数的极值，会求简单多元函数的最大值和最小值.

3．了解拉格朗日乘数法，会用拉格朗日乘数法求条件极值，并会解决简单的应用问题.

## 9.3.2　基本内容

### 1．空间曲线的切线与法平面

（1）设空间曲线$\varGamma$的参数方程为

$$\varGamma:\ x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t),\qquad t\in[\alpha,\beta]$$

这里假定 $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$都在$[\alpha, \beta]$上可导，且三个导数不同时为零. 则曲线$\varGamma$上对应于参数 $t=t_0$ 的一点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

其中，向量 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{f}'(t_0)=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$是曲线$\varGamma$在点 $M$ 处的一个切向量.

（2）设空间曲线$\varGamma$的一般方程为

$$F(x, y, z)=0, G(x, y, z)=0.$$

$M(x_0, y_0, z_0)$是曲线$\varGamma$上的一个点，设 $F$、$G$ 有对各个变量的连续偏导数，且$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_M\neq 0$，其中下标带 $M$ 的行列式表示行列式在点 $M(x_0, y_0, z_0)$的值. 则曲线$\varGamma$在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程和法平面方程分别为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_M}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_M}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_M}$$

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_M(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_M(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_M(z-z_0)=0$$

**2．曲面的切平面与法线**

（1）设曲面$\Sigma$的隐式方程为

$$F(x, y, z) = 0,$$

$M(x_0, y_0, z_0)$是曲面$\Sigma$上的一点，并设函数 $F(x, y, z)$的偏导数在该点连续且不同时为零．曲面上通过点 $M$ 的一切曲线在点 $M$ 的切线都在同一个平面上，这个平面称为曲面$\Sigma$在点 $M$ 的切平面．这切平面的方程是

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0) = 0.$$

通过点 $M(x_0, y_0, z_0)$且垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线．法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量，向量

$$\boldsymbol{n} = (F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0))$$

是曲面$\Sigma$在点 $M$ 处的一个法向量.

（2）设曲面$\Sigma$ 的显式方程为

$$z = f(x, y)$$

则曲面$\Sigma$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$处的切平面和法线方程分别为

$$f_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f_y(x_0, y_0)-(z-z_0)=0$$

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$$

**3．多元函数极值的概念**

设函数 $z = f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某个邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 $P_0$ 任何点$(x, y)$，都有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0)(\text{或} f(x, y)>f(x_0, y_0)),$$

则称函数 $f(x, y)$在点$(x_0, y_0)$有极大值（或极小值）$f(x_0, y_0)$．点$(x_0, y_0)$称为函数 $f(x, y)$的极大值点（或极小值点）．极大值、极小值统称为极值，使得函数取得极值的点称为极值点.

以上关于二元函数的极值概念，可推广到 $n$ 元函数．设 $n$ 元函数 $u = f(P)$在点 $P_0$ 的某一邻域内有定义，如果对于该邻域内异于 $P_0$ 的任何点 $P$，都有

$$f(P) < f(P_0)(\text{或} f(P) > f(P_0)),$$

则称函数 $f(P)$在点 $P_0$ 有极大值（或极小值）$f(P_0)$.

**4．多元函数极值的必要条件**

设函数 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$具有偏导数，且在点$(x_0,y_0)$处有极值，则有

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

类似可推广到 $n$ 元函数，如果 $n$ 元函数 $u=f(P)$在点 $P_0$ 具有偏导数，则它在点 $P_0$ 具有极值的必要条件为偏导数均为 0.

**5．二元函数极值的充分条件**

设函数 $z=f(x,y)$在点$(x_0,y_0)$的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$，令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则 $f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC-B^2>0$ 时具有极值，且当 $A<0$ 时有极大值，当 $A>0$ 时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$ 时没有极值；

（3）$AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值，还需另作讨论.

**6．条件极值及拉格朗日乘数法**

对自变量附加有约束条件的极值问题称为条件极值问题（不带约束条件的极值问题也称为无条件极值问题）. 条件极值问题在实际问题中应用非常广泛，其一般形式是：在条件组 $\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\ i=1,2,\cdots,m(m<n)$ 约束下，求目标函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的极值. 求解这类极值问题的方法，是用消元法化为无条件极值问题求解. 拉格朗日乘数法是一种不直接依赖消元法而求解条件极值问题的有效方法.

拉格朗日乘数法：求函数 $z=f(x,y)$在条件$\varphi(x,y)=0$ 下的极值，先作拉格朗日函数

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中$\lambda$称为拉格朗日乘数. 然后解方程组

$$\begin{cases} L_x(x,y)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ L_y(x,y)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0. \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

由这方程组解出 $x,y$ 及$\lambda$，这样得到的$(x,y)$就是函数 $f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

这种方法可以推广到自变量多于两个而条件多于一个的情形.

## 9.3.3　典型例题

**【例 1】** 由曲线$\begin{cases} 3x^2+2y^2=12 \\ z=0 \end{cases}$绕 $y$ 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处指向外侧的单位法向量为________

**解**：由解析几何知识知，该旋转曲面方程是$3(x^2+z^2)+2y^2=12$.记

$$F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12$$

则旋转面 $F(x,y,z)=0$ 在 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的一对法向量是

$$\pm(F_x,F_y,F_z)\big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\pm(6x,4y,6z)\big|_{(0,\sqrt{3},\sqrt{2})}=\pm2(0,2\sqrt{3},3\sqrt{2})$$

单位化后得 $\pm\dfrac{(0,2\sqrt{3},3\sqrt{2})}{\sqrt{12+18}}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3})$.

这是旋转椭球面，点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 位于第一卦限，因此指向外侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,\sqrt{2},\sqrt{3}).$$

**【例 2】** 设曲线 $\Gamma$ 位于曲面 $z=x^2+y^2$ 上，$\Gamma$ 在 $xOy$ 平面上投影的极坐标方程为 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$，则 $\Gamma$ 上极坐标 $(\rho,\theta,z)=(1,0,1)$ 的点 $M_0$ 的切线的直角坐标方程为________.

**解**：$M_0$ 的直角坐标为

$$(x_0,y_0,z_0)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\big|_{(\rho,\theta,z)=(1,0,1)}=(1,0,1).$$

而 $\Gamma$ 的参数方程为

$$x=\rho(\theta)\cos\theta=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta,z=x^2+y^2=\mathrm{e}^{2\theta}.$$

因此 $\Gamma$ 在点 $M_0$ 处的切向量

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=(x'(\theta),y'(\theta),z'(\theta))\big|_{\theta=0}\\&=(\mathrm{e}^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta),\mathrm{e}^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta),2\mathrm{e}^{2\theta})\big|_{\theta=0}=(1,1,2).\end{aligned}$$

故 $\Gamma$ 在 $M_0$ 处的切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}.$$

**评注**：位于旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 上曲线 $\Gamma$ 在 $xOy$ 平面上投影是一对数螺线，其方程是 $x=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，从而柱面 $x^2+y^2=\rho^2(\theta),0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 与 $z=x^2+y^2$ 的交线为 $\Gamma$，于是 $\Gamma$ 的参数方程是

$$x=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta,z=\mathrm{e}^{2\theta},0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

**【例 3】** 求 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

**解**：先求驻点，令

$$\begin{cases}f_x=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\\ f_y=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0\end{cases}，解得\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}或\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}.$$

因为 $f_{xx}=(x^3-3x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f_{xy}=(x^2y-y)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，$f_{yy}=(xy^2-x)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，则在点(1,0)处，有 $A=f_{xx}(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$, $B=f_{xy}(1,0)=0$, $C=f_{yy}(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，故 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0,A<0$，所以（1,0）是极大值点，极大值为 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

在点 $(-1,0)$ 处，有 $A=f_{xx}(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，$B=f_{xy}(-1,0)=0$，$C=f_{yy}(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$，故 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0,\ \ A>0$，所以（$-1,0$）是极小值点，极大值为 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

**【例 4】** 求函数 $f(x,y,z)=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

**解**：作拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xy+2yz+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$$

求其偏导数并使之为零，得到

$$\begin{cases}L_x=y+2\lambda x=0\\ L_y=x+2z+2\lambda y=0\\ L_z=2y+2\lambda z=0\\ x^2+y^2+z^2-10=0\end{cases}$$

得可能极值点 $(1,\pm\sqrt{5},2)$ 和 $(-1,\pm\sqrt{5},-2)$，其对应函数值为 $f(1,\sqrt{5},2)=f(-1,-\sqrt{5},-2)=5\sqrt{5}$，$f(1,-\sqrt{5},2)=f(-1,\sqrt{5},-2)=-5\sqrt{5}$，此题已肯定有最大值和最小值，而满足必要条件各只有一个，因此最大值为 $5\sqrt{5}$，最小值为 $-5\sqrt{5}$.

**【例 5】** 求坐标原点到曲线 C：$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\ 2x-y-z=1\end{cases}$ 的最短距离.

**解**：设曲线 C 上点（$x,y,z$）到坐标原点的距离为 $d$，令 $W=d^2=x^2+y^2+z^2$ 为目标函数，约束条件为 $x^2+y^2-z^2-1=0,\ \ 2x-y-z-1=0$，用拉格朗日乘数法，令

$$L(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)+\lambda(x^2+y^2-z^2-1)+\mu(2x-y-z-1).$$

求其偏导数并使之为零，得到

$$\begin{cases}L_x=2x+2\lambda x+2\mu=0 & (1)\\ L_y=2y+2\lambda y-\mu=0 & (2)\\ L_z=2z-2\lambda z-\mu=0 & (3)\\ x^2+y^2-z^2-1=0 & (4)\\ 2x-y-z-1=0 & (5)\end{cases}$$

首先，由（1）+2×（2）消去 $\mu$，得 $(x+2y)(\lambda+1)=0$. 如果 $x+2y=0$，联立（4),（5）方程组无解；如果 $\lambda=-1$，则 $\mu=0$, 由（3）可知 $z=0$，再由（4),（5）得

$$x^2+y^2-1=0,\ \ 2x-y-1=0$$

解得 $\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}$　　$\begin{cases}x=\dfrac{4}{5}\\ y=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

这样得到两个驻点 $P_1(0,-1,0),\ \ P_2\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5},0\right)$；

综合上面讨论可知只有两个驻点，它们到坐标原点的距离均为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$，由于该实际问题一定有最短距离，可知最短距离为 1.

**评注：** *由于 C 为双曲线，所以坐标原点到 C 的最大距离不存在.*

**【例 6】** 已知 $x$ , $y$ , $z$ 为常数，且 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$，求证：$\mathrm{e}^x y^2|z|\leqslant 1$

**证明：** 设 $a=\mathrm{e}^x$ , $b=y^2$ , $c=|z|$ , 此问题变为求函数 $f(a,b,c)=abc$ 满足条件 $a+b+c=3$ 的最大值，其中 $a$ , $b$ , $c$ 都大于零. 考虑函数

$$L(a,b,c)=abc+\lambda(a+b+c-3)$$

求其偏导数并使之为零，得到

$$\begin{cases} bc+\lambda=0 \\ ac+\lambda=0 \\ ab+\lambda=0 \\ a+b+c=3 \end{cases}$$

可得 $a=b=c=1$，所以所求最大值为 $f(1,1,1)=1$. 即有 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$ 时，$\mathrm{e}^x y^2|z|\leqslant 1$.

**评注：** *所要证明的不等式左边恰好为约束条件左边三项的乘积，从而可得目标函数* $f(x,y,z)=\mathrm{e}^x y^2|z|$.

**【例 7】** 设有曲面 $S$：$\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1$，平面 $\pi:2x+2y+z=5$，（1）在曲面 $S$ 上求平行于平面 $\pi$ 的切平面方程；（2）求曲面 $S$ 与平面 $\pi$ 之间的最短距离.

**解：**（1）先写出曲面 $S$ 上任意点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程.

记 $S$ 的方程为 $F(x,y,z)=\dfrac{x^2}{2}+y^2+\dfrac{z^2}{4}-1=0$，则 $S$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

其中
$$F_x(M_0)=x_0, F_y(M_0)=2y_0, F_z(M_0)=\frac{z_0}{2}.$$

因为该切平面与平面 $\pi$ 平行，即它们的法向量平行，故有

$$\frac{x_0}{2}=\frac{2y_0}{2}=\frac{\frac{z_0}{2}}{1}=\lambda$$

又因为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在 $S$ 上，所以它满足曲面方程

$$\frac{{x_0}^2}{2}+{y_0}^2+\frac{{z_0}^2}{4}=\frac{1}{2}(2\lambda)^2+\lambda^2+\frac{1}{4}(2\lambda)^2=1,$$

即 $4\lambda^2=1, \lambda=\pm\dfrac{1}{2}$，于是 $(x_0,y_0,z_0)=\pm\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$，显然，$(x_0,y_0,z_0)$ 不在平面 $\pi$ 上.

相应的切平面方程为

$$(x-1)+\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(z-1)=0 \text{ 即 } x+y+\frac{1}{2}z-2=0$$

及
$$(x+1)+\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(z+1)=0 \text{ 即 } x+y+\frac{1}{2}z+2=0 .$$
也就是曲面 $S$ 上平行于平面 $\pi$ 的切平面方程.

（2）曲面 $S$ 为椭球面，而椭球面 $S$ 正好夹在上述两个切平面之间，故曲面 $S$ 上切点到平面 $\pi$ 的距离最短或最长
$$d_1=\frac{\left|2\times1+2\times\frac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=\frac{1}{3},$$
$$d_2=\frac{\left|2\times(-1)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1-5\right|}{\sqrt{2^2+2^2+1}}=3 .$$
因此，曲面 $S$ 与平面 $\pi$ 之间的最短距离为 $\frac{1}{3}$.

## 9.3.4　疑难释疑

1．当空间曲线 $\Gamma$ 由一般方程
$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$
给出时，它在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\boldsymbol{T}$ 的表达式能否用几何方法直接导出？

答：在学了空间曲面在一点处的法向量的表达式以后，空间曲线在一点处的切向量 $\boldsymbol{T}$ 的表达式也可用几何方法直接导出如下：

因为曲线 $\Gamma$ 是曲面 $\Sigma_1: F(x,y,z)=0$ 和 $\Sigma_2: G(x,y,z)=0$ 的交线，故 $\Gamma$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线应同时位于 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 在 $M_0$ 处的切平面上，也就是说该切线是这两个切平面的交线．因此 $\Gamma$ 在点 $M_0$ 处的切向量 $\boldsymbol{T}$ 应同时垂直于 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$ 在 $M_0$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$（如图），于是可取
$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0))\times(G_x(M_0),G_y(M_0),G_z(M_0))$$
$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

2．如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处取得极值，那么一元函数 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 及 $\psi(y)=f(x_0,y)$ 分别在点 $x=x_0,y=y_0$ 处必定取得极值．那么，反之是否成立？

答：反之未必成立．就是说，若 $\varphi(x)=f(x,y_0)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值，$\psi(y)=f(x_0,y)$ 在点 $y=y_0$ 处取得极值，则 $f(x,y)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 处未必取得极值．例如，设函数 $f(x,y)=x^2-y^2$，则有 $\varphi(x)=f(x,0)=x^2$ 在 $x=0$ 处取得极小值，$\psi(y)=f(0,y)=-y^2$ 在 $y=0$ 处取得极大值．但是 $f(0,0)=0$ 既非极大值，也非极小值．因为在 $(0,0)$ 的邻域内，若 $x=0,y\neq0$ 时，有 $f(x,y)=-y^2<0$，而当 $x\neq0,y=0$ 时，有 $f(x,y)=x^2>0$，故 $f(0,0)$ 不是函数的极值．该函数的图像是马鞍面.

## 9.3.5　部分习题解答

【习题 9-6】

3．求曲线 $\boldsymbol{r}=(t-\sin t)\boldsymbol{i}+(1-\cos t)\boldsymbol{j}+\left(4\sin\dfrac{t}{2}\right)\boldsymbol{k}$ 在与 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 相应的点处的切线及法平面方程.

**解**：令 $x=t-\sin t, y=1-\cos t,\ \ z=4\sin\dfrac{t}{2}$

则 $x'(t)=1-\cos t, y'(t)=\sin t,\ \ z'(t)=2\cos\dfrac{t}{2}$.

故在点 $t_0=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切向量为 $\boldsymbol{T}=\ (1,1,\sqrt{2})$．此时，切线方程为

$$\frac{x+1-\frac{\pi}{2}}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$1\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}+1\right)+1\cdot(y-1)+\sqrt{2}(z-2\sqrt{2})=0\text{，即 }x+y+\sqrt{2}z=\frac{\pi}{2}+4.$$

6．求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-3x=0\\2x-3y+5z-4=0\end{cases}$ 在点(1, 1, 1)处的切线及法平面方程.

**解**：设曲线的参数方程的参数为 $x$，对 $x$ 求导得,

$$\begin{cases}2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-3=0\\[2ex]2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}\text{，即}\begin{cases}2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-2x+3\\[2ex]3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=2\end{cases}.$$

解此方程组得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{10x-4z-15}{-10y-6z},\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{6x+4y-9}{-10y-6z}.$$

因为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{9}{16}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{(1,1,1)}=-\dfrac{1}{16}$，所以 $\boldsymbol{T}=\left(1,\ \dfrac{9}{16},\ -\dfrac{1}{16}\right)$.

所求切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\frac{9}{16}}=\frac{z-1}{-\frac{1}{16}}\text{，即}\frac{x-1}{16}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-1}{-1};$$

法平面方程为

$$(x-1)+\frac{9}{16}(y-1)-\frac{1}{16}(z-1)=0\text{，即 }16x+9y-z-24=0.$$

8．求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面及法线方程.

**解**：令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z-z+xy-3$，则

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(2,1,0)}=(y,x,\mathrm{e}^z-1)|_{(2,1,0)}=(1,2,0),$$

点(2,1, 0)处的切平面方程为

$$1\cdot(x-2)+2(y-1)+0\cdot(z-0)=0，即 x+2y-4=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{0}.$$

10．求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.

**解**：设 $F(x, y, z)=x^2+2y^2+z^2-1$，则

$$\boldsymbol{n}=(F_x, F_y, F_z)=(2x, 4y, 2z)=2(x, 2y, z).$$

已知切平面的法向量为(1, –1, 2). 因为已知平面与所求切平面平行，所以

$$\frac{x}{1}=\frac{2y}{-1}=\frac{z}{2}，即 x=\frac{1}{2}z，\ y=-\frac{1}{4}z,$$

代入椭球面方程得

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2+2\left(-\frac{z}{4}\right)^2+z^2=1,$$

解得 $z=\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}$，则 $x=\pm\sqrt{\frac{2}{11}}$， $y=\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}$.

所以切点坐标为$\left(\pm\sqrt{\frac{2}{11}},\ \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}},\ \pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)$.

所求切平面方程为

$$\left(x\pm\sqrt{\frac{2}{11}}\right)-\left(y\mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{11}}\right)+2\left(z\pm2\sqrt{\frac{2}{11}}\right)=0,$$

即

$$x-y+2z=\pm\sqrt{\frac{11}{2}}.$$

11．求旋转椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 上点(–1, –2, 3)处的切平面与 $xOy$ 面的夹角的余弦.

**解**：$xOy$ 面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(0, 0, 1)$.

令 $F(x, y, z)=3x^2+y^2+z^2-16$，则点(–1, –2, 3)处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=(F_x, F_y, F_z)|_{(-1,-2,3)}=(6x, 2y, 2z)|_{(-1,-2,3)}=(-6,-4,6).$$

点(–1, –2, 3)处的切平面与 $xOy$ 面的夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{6}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{6^2+4^2+6^2}}=\frac{3}{\sqrt{22}}.$$

12．试证曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ ($a$>0)上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 $a$.

**证明**：设 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{a}$，则

$$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \frac{1}{2\sqrt{y}},\ \frac{1}{2\sqrt{z}}\right).$$

在曲面上任取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$，则在点 $M$ 处的切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即
$$\frac{x}{\sqrt{x_0}}+\frac{y}{\sqrt{y_0}}+\frac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a}.$$

化为截距式，得 $\dfrac{x}{\sqrt{ax_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{ay_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{az_0}}=1$，

所以截距之和为

$$\sqrt{ax_0}+\sqrt{ay_0}+\sqrt{az_0}=\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=a.$$

【习题 9-8】

4．求函数 $f(x, y) = \mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$的极值.

**解**：解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}$，得驻点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$.

$$f_{xx}(x, y) = 4\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y+1), f_{xy}(x, y) = 4\mathrm{e}^{2x}(y+1), f_{yy}(x, y) = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

在驻点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)$处，因为

$$AC-B^2 = 2\mathrm{e}\cdot2\mathrm{e}-0^2 = 4\mathrm{e}^2 > 0, A = 2\mathrm{e} > 0,$$

所以 $f\left(\dfrac{1}{2},\ -1\right)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$是函数的极小值.

5．求函数 $z = xy$ 在适合附加条件 $x+y = 1$ 下的极大值.

**解**：由 $x+y = 1$ 得 $y = 1-x$，代入 $z = xy$，则问题化为求 $z=x(1-x)$的无条件极值.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-2x,\ \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=-2.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$，得驻点 $x=\dfrac{1}{2}$. 因为 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=\frac{1}{2}}=-2<0$，所以由一元函数取极值的充分条件知 $x=\dfrac{1}{2}$为极大值点，极大值为 $z=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$.

8．在平面 $xOy$ 上求一点，使它到 $x=0, y=0$ 及 $x+2y-16 = 0$ 三直线距离平方之和为最小.

**解**：设所求点为$(x, y)$，则此点到 $x = 0$ 的距离为$|y|$，到 $y = 0$ 的距离为$|x|$，到 $x+2y-16 = 0$ 的距离为$\dfrac{|x+2y-16|}{\sqrt{1+2^2}}$，而距离平方之和为

$$z=x^2+y^2+\frac{1}{5}(x+2y-16)^2.$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} 3x+y-8=0 \\ 2x+9y-32=0 \end{cases}.$$

得唯一的驻点$\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$，根据问题的性质可知，到三直线的距离平方之和最小的点一定存在，故$\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$即为所求.

10．求内接于半径为 $a$ 的球且有最大体积的长方体.

**解**：设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $(x, y, z)$是它的各面平行于坐标面的内接长方体在第一卦限内的一个顶点，则此长方体的长宽高分别为 $2x, 2y, 2z$，体积为

$$V=2x\cdot 2y\cdot 2z=8xyz.$$

令 $F(x, y, z)=8xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-a^2)$ .

解方程组

$$\begin{cases} F_x=8yz+2\lambda x=0 \\ F_y=8xz+2\lambda y=0 \\ F_z=8xy+2\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} 4yz+\lambda x=0 \\ 4xz+\lambda y=0 \\ 4xy+\lambda z=0 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases},$$

得唯一驻点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}, \dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$.

由题意可知这种长方体必有最大体积，所以当长方体的长、宽、高都为$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$时其体积最大.

11．抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求原点到这椭圆的最长与最短距离.

**解**：设椭圆上点的坐标$(x, y, z)$，则原点到椭圆上这一点的距离平方为

$d^2=x^2+y^2+z^2$，其中 $x, y, z$ 要同时满足 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=1$.

令
$$F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2+\lambda_1(z-x^2-y^2)+\lambda_2(x+y+z-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x=2x-2\lambda_1 x+\lambda_2=0 \\ F_y=2y-2\lambda_1 y+\lambda_2=0 \\ F_z=2z+\lambda_1+\lambda_2=0 \\ z-x^2-y^2=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases},$$

得驻点 $x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$z=2\mp\sqrt{3}$ . 它们是可能的两个极值点，由题意这种距离的最大值和最小值一定存在，所以距离的最大值和最小值在两点处取得，因为在驻点处

$$d^2=x^2+y^2+z^2=2\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}\right)^2+(2\mp\sqrt{3})^2=9\mp 5\sqrt{3},$$

所以 $d_1=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ 为最长距离；$d_2=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$ 为最短距离.

## 9.3.6　练习题

1．选择题

（1）以下结论正确的是（　　）.

A．函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 达到极值，则必有 $f'_x(x_0,y_0)=0$， $f'_y(x_0,y_0)=0$

B．可微函数 $f(x,y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 达到极值，则必有 $f'_x(x_0,y_0)=0$， $f'_y(x_0,y_0)=0$

C．若 $f_x(x_0,y_0)=0$， $f_y(x_0,y_0)=0$，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 达到极值

D．若 $f_x(x_0,y_0)=0$， $f_y(x_0,y_0)$ 不存在，则 $f(x,y)$ 在 $(x_0, y_0)$ 达到极值

（2）函数 $f(x,y)=2(x-y)+x^2-y^2$ 的驻点为（　　）.

A． $(1,1)$　　B． $(-1,1)$　　C． $(1,-1)$　　D． $(-1,-1)$

（3）函数 $f(x, y)=x^2-ay^2\ \ (a>0)$ 在$(0, 0)$处（　　）

A．不取极值　　B．取极小值　　C．取极大值　　D．是否取极值依赖于 $a$

2．填空题

（1）过曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 上点 $M_0$（1,2,0）处的切平面方程为________.

（2）过曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 $P$ 处的切平面平行于 $2x+2y+z-1=0$，则 $P$ 点的坐标为________.

（3）曲线 $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ 2x^2+2y^2-z^2=0 \end{cases}$ 在点 $M_0$（1,1,2）处的切线方程为________，法平面方程为________.

（4）曲线 $x=a\cos t$， $y=a\sin t$， $z=bt$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处的切线方程为________.

（5）已知曲面 $z=xy$ 上的点 $P$ 处的法线 $l$ 平行于直线 $l_1:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{2z-1}{2}$，则该法线方程为________.

3．求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

4．求 $z=2x+y$ 在区域 $D:x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1$ 上的最大值与最小值.

5．在半径为 $R$ 的圆的一切内接三角形中，求出其面积最大者.

6．利用条件极值的方法证明不等式 $xy^2z^3\leqslant 108\left(\dfrac{x+y+z}{6}\right)^6, x>0, y>0, z>0$.

## 习题答案

1．（1）B　　（2）D　　（3） A

2．（1） $2x+y-4=0$　　（2）（1,1,2）

（3） $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}$，　$y-x=0$.

（4） $\dfrac{x}{-a}=\dfrac{y-a}{0}=\dfrac{z-\frac{\pi b}{2}}{b}$

（5） $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$

3． $\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$

4．最大值为 $2\sqrt{2}$，最小值为 $-2\sqrt{2}$．

5．内接等边三角形面积最大.

6．提示：设目标函数为 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，约束条件是 $x+y+z=a,(x>0,y>0,z>0,a>0)$

## 9.3.7　考研真题

**【例 1】**（2001 年数一）设 $f(x,y)$ 在点(0, 0)的附近有定义，且 $f'_x(0,\ 0)=3,\ f'_y(0,\ 0)=1$，则(　　).

A．$\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

B．曲面 $z=f(x,y)$ 在(0, 0, $f$(0, 0))处的法向量为{3, 1, 1}

C．曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在(0, 0, $f$(0, 0))处的切向量为{1, 0, 3}

D．曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在(0, 0, $f$(0, 0))处的切向量为{3, 0, 1}

**解**：关于（A），涉及可微与可偏导的关系．由 $f(x,y)$ 在(0,0)存在两个偏导数不能推导出 $f(x,y)$ 在(0,0)处可微．因此（A）不一定成立.

关于（B）只能假设 $f(x,y)$ 在(0,0)存在偏导数 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x},\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$，不保证曲面 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0,f(0,0))$ 存在切平面.若存在时,法向量 $\boldsymbol{n}=\pm\left(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x},\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y},-1\right)=\pm(3,1,-1)$与(3,1,1)不共线，因而（B）不成立.

关于（C）（D），该曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=f(t,0) \end{cases}$，它在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为 $\left.\left(t',0,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t,0)\right)\right|_{t=0}=(1,0,f'_x(0,0))=(1,0,3)$．因此，（C）成立.

**【例 2】**（2013 年数一）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点(0,1,–1)处的切平面方程为(　　).

A．$x-y+z=-2$　　B．$x+y+z=0$　　C．$x-2y+z=-3$　　D．$x-y-z=0$

**解**：应选（A）

法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x-y\sin(xy)+1,-x\sin(xy)+z,y)$，因此 $\boldsymbol{n}|_{(0,1,-1)}=(1,-1,1)$，故切平面方程为：$1(x-0)-1(y-1)+1(z+1)=0$，即 $x-y+z=-2$.

**【例 3】**（2003 年数三）设可微函数 $f(x,y)$在点 $(x_0,y_0)$ 取得极小值，则下列结论正确的是(　　).

A．$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.　　B．$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

C．$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.　　D．$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

**解**：应选（A）

可微函数 $f(x,y)$在点 $(x_0,y_0)$ 取得极小值，根据取极值的必要条件知 $f'_y(x_0,y_0)=0$，即 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零，故应选（A）.

**评注**：本题考查了偏导数的定义，$f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数即 $f_y(x_0,y_0)$；而 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处的导数即 $f_x(x_0,y_0)$.

此外，本题也可用排除法分析，取 $f(x,y)=x^2+y^2$，在(0,0)处可微且取得极小值，并且有 $f(0,y)=y^2$，可排除（B），（C），（D），故应选（A）.

**【例 4】**（2003 年数一） 已知函数 $f(x,y)$ 在点 (0, 0) 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）.

A．点(0, 0)不是 $f(x,y)$ 的极值点

B．点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极大值点

C．点(0, 0)是 $f(x,y)$ 的极小值点

D．根据所给条件无法判断点(0, 0)是否为 $f(x,y)$ 的极值点

**解：**应选（A）.

由 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$ 知，分子的极限必为零，从而有 $f(0,0)=0$，且

$f(x,y)-xy\approx(x^2+y^2)^2$（$|x|,|y|$ 充分小时），于是

$$f(x,y)-f(0,0)\approx xy+(x^2+y^2)^2.$$

可见当 $y=x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx x^2+4x^4>0$；

而当 $y=-x$ 且 $|x|$ 充分小时，$f(x,y)-f(0,0)\approx -x^2+4x^4<0$．故点(0,0)不是 $f(x,y)$ 的极值点，应选（A）.

**评注：**本题综合考查了多元函数的极限、连续和多元函数的极值概念，题型比较新，有一定难度．将极限表示式转化为极限值加无穷小量，是有关极限分析过程中常用的思想.

**【例 5】**（2006 年数一） 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi_y(x,y)\neq 0$，已知 $(x_0,y_0)$ 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是（　　）.

A．若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$.

B．若 $f_x(x_0,y_0)=0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

C．若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)=0$.

D．若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$.

**解：**应选（D）

作拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，并记对应 $x_0,y_0$ 的参数 $\lambda$ 的值为 $\lambda_0$，则

$$\begin{cases}F_x(x_0,y_0,\lambda_0)=0\\ F_y(x_0,y_0,\lambda_0)=0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0\\ f_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0\end{cases}.$$

消去 $\lambda_0$，得

$$f_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)-f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)=0,$$

整理得 $f_x(x_0,y_0)=\dfrac{f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}$.（因为 $\varphi_y(x,y)\neq 0$），

所以若 $f_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$．故选（D）.

**【例 6】**（2011 年数一） 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(x)>0, f'(0)=0$．则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点（0,0）处取得极小值的一个充分条件是（　　）.

A. $f(0)>1, f''(0)>0$　　B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$　　D. $f(0)<1, f''(0)<0$

**解**：应选（A）

由 $z=f(x)\ln f(y)$ 知 $z_x=f'(x)\ln f(y)$，$z_y=\dfrac{f(x)}{f(y)}f'(y)$，$z_{xy}=\dfrac{f'(x)}{f(y)}f'(y)$，

$$z_{xx}=f''(x)\ln f(y)\text{，}\quad z_{yy}=f(x)\frac{f''(y)f(y)-(f'(y))^2}{f^2(y)}.$$

所以 $z_{xy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}f'(0)=0$，$z_{xx}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=f''(0)\ln f(0)$，

$$z_{yy}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=f(0)\frac{f''(0)f(0)-(f'(0))^2}{f^2(0)}=f''(0)$$

要使得函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点(0,0)处取得极小值，则需

$$f''(0)\ln f(0)>0\text{，}\quad f''(0)\ln f(0)\cdot f''(0)>0$$

所以有 $f(0)>1,\ f''(0)>0$,故应选（A）.

**【例 7】**（2000 年数一）　曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,-2)$ 的法线方程为________.

**解**：应填 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$

令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则有

$$F_x(1,-2,2)=2x\big|_{(1,-2,2)}=2\text{，}\quad F_y(1,-2,2)=4y\big|_{(1,-2,2)}=8\text{，}\quad F_z(1,-2,2)=6z\big|_{(1,-2,2)}=12.$$

因此所求法线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$$

**【例 8】**（2003 年数一）曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是________.

**解**：待求平面的法矢量为 $\boldsymbol{n}=(2,4,-1)$，因此只需确定切点坐标即可求出平面方程，而切点坐标可根据曲面 $z=x^2+y^2$ 切平面的法向量与 $\boldsymbol{n}=(2,4,-1)$ 平行确定.

令 $F(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$$F'_x=-2x\text{，}\quad F'_y=-2y\text{，}\quad F'_z=1.$$

设切点坐标为 $(x_0,y_0,z_0)$，则切平面的法向量为 $(-2x_0,-2y_0,1)$，其与已知平面 $2x+4y-z=0$ 平行，因此有

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{4}=\frac{1}{-1}\text{，}$$

可解得 $x_0=1, y_0=2$，相应地有　$z_0=x_0^2+y_0^2=5.$

故所求的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\text{，即 }2x+4y-z=5.$$

**【例 9】**（2009 年数一）　求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

**解**：先求驻点，令

$$\begin{cases} f_x = 2x(2+y^2) = 0 \\ f_y = 2x^2 y + \ln y + 1 = 0 \end{cases},$$

解得 $x=0, y=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

此时 $f_{xx}=2(2+y^2), f_{yy}=2x^2+\dfrac{1}{y}, f_{xy}=4xy$

则在点 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 处，$A=f_{xx}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\left(2+\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\right)$，$B=f_{xy}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$，$C=f_{yy}\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}$.

因为 $AC-B^2>0, A>0$，所以 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是极小值点，极小值为 $f\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

**【例 10】**（2013 年数一） 求函数 $f(x,y)=\left(y+\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值.

**解：** 先求驻点，令

$$\begin{cases} f_x=\left(x^2+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0 \\ f_y=\left(1+y+\dfrac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}=0 \end{cases}，解得 \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases} 或 \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{4}{3} \end{cases}.$$

$$f_{xx}=\left(2x+2x^2+y+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}, f_{xy}=\left(x^2+1+y+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}, f_{yy}=\left(2+y+\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{e}^{x+y}.$$

则在点 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 处，$A=f_{xx}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，$B=f_{xy}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，$C=f_{yy}\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{5}{3}}$，因为 $AC-B^2<0$，所以 $\left(-1,-\dfrac{2}{3}\right)$ 不是极值点.

类似地，在点 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 处，$A=f_{xx}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=3\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，$B=f_{xy}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，$C=f_{yy}\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$，因为 $AC-B^2>0, A>0$，所以 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 是极小值点，极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

**【例 11】**（2004 年数一） 设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

**解：** 因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，

方程两边分别对 $x$，$y$ 求偏导，得 $2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$，

$$-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} x-3y=0 \\ -3x+10y-z=0 \end{cases}$，

故$\begin{cases} x=3y \\ z=y \end{cases}$.

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ z=3 \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-9 \\ y=-3 \\ z=-3 \end{cases}.$$

由于$2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$，

$$-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

所以 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{1}{6}$，$B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(9,3,3)}=-\dfrac{1}{2}$，$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(9,3,3)}=\dfrac{5}{3}$，故 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=\dfrac{1}{6}>0$，从而点(9,3)是 $z=z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$.

类似地，由

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3},$$

可知 $AC-B^2=\dfrac{1}{36}>0$，又 $A=-\dfrac{1}{6}<0$，从而点(−9, −3)是 $z=z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

**评注：**本题讨论由方程所确定的隐函数求极值问题，关键是求可能极值点时应注意 $x$，$y$，$z$ 满足原方程.

**【例 12】**(2007 年数一）求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

**解：**先求驻点，令

$$\begin{cases} f_x=2x-2xy^2=0 \\ f_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$$

得开区域内的驻点即可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

又当 $y=0$ 时，$f(x,y)=x^2$ 在 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0.

当 $x^2+y^2=4, y>0,-2<x<2$ 时，构造拉格朗日函数：

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x = 2x - 2xy^2 + 2\lambda x = 0 \\ F_y = 4y - 2x^2 y + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0\end{cases}$$

得可能极值点：$(0,2),\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$，其对应函数值为 $f(0,2)=8, f\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}},\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)=\dfrac{7}{4}$.

比较函数值 $2,0,4,8,\dfrac{7}{4}$，知 $f(x, y)$在区域 $D$ 上的最大值为 8，最小值为 0.

**评注**：由于 $D$ 为闭区域，在开区域内按无条件极值分析，而在边界上按条件极值讨论即可.

**【例 13】**（2008 年数一） 已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 $C$ 距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点.

**解法一**：点 $(x,y,z)$ 到 $xOy$ 面的距离为 $|z|$，故求 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点的坐标等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0,\ x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点.

构造拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5)$，

解方程组

$$\begin{cases}L_x = 2\lambda x + \mu = 0 \\ L_y = 2\lambda y + \mu = 0 \\ L_z = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \\ x + y + 3z = 5\end{cases}$$

得 $x=y$，从而

$$\begin{cases}2x^2 - 2z^2 = 0, \\ 2x + 3z = 5.\end{cases}\ \text{解得}\begin{cases}x=-5, \\ y=-5, \\ z=5.\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=1, \\ y=1, \\ z=1.\end{cases}$$

根据几何意义，曲线 $C$ 上存在距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$ .

**解法二**：点 $(x,y,z)$ 到 $xOy$ 面的距离为 $|z|$，故求 $C$ 上距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点的坐标等价于求函数 $H=x^2+y^2$ 在条件 $x^2+y^2-2\left(\dfrac{x+y-5}{3}\right)^2=0$ 下的最大值点和最小值点.

构造拉格朗日函数：$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+\lambda\left(x^2+y^2-\dfrac{2}{9}(x+y-5)^2\right)$，

解方程组

$$\begin{cases}L_x = 2x + \lambda\left(2x - \dfrac{4}{9}(x+y-5)\right) = 0 \\ L_y = 2y + \lambda\left(2y - \dfrac{4}{9}(x+y-5)\right) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2\left(\dfrac{x+y-5}{3}\right)^2 = 0\end{cases}$$

得 $x=y$，从而 $2x^2-\dfrac{2}{9}(2x-5)^2=0$ .

解得

$$\begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \\ z=5 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1, \\ z=1 \end{cases}$$

根据几何意义，曲线 $C$ 上存在距离 $xOy$ 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$ .

**评注：**本题也可利用参数化为一元函数极值问题，详解见第 8 章§8.2 考研真题例 7.

# 9.4　方向导数和梯度

## 9.4.1　基本要求

1．理解方向导数与梯度的概念，并掌握其计算方法.

## 9.4.2　基本内容

### 1．方向导数的概念

设函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的某一邻域 $U(P_0)$内有定义，$P(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)$为 $l$ 上另一点，且 $P\in U(P_0)$. 设 $l$ 是 $xOy$ 平面上以 $P_0(x_0, y_0)$为始点的一条射线，$\cos\alpha$, $\cos\beta$是方向 $l$ 的方向余弦. 如果函数增量 $f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\cos\beta)-f(x_0, y_0)$与 $P$ 到 $P_0$ 的距离$|PP_0|=t$ 的比值

$$\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

当 $P$ 沿着 $l$ 趋于 $P_0$（即 $t\to0^+$）时的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在点 $P_0$ 沿方向 $l$ 的方向导数，记作 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$，即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}.$$

方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 就是函数 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$处沿方向 $l$ 的变化率.

### 2．方向导数的计算

如果函数 $z=f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$可微分，那么函数在该点沿任一方向 $l$ 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$是方向 $l$ 的方向余弦.

3．梯度的概念

设函数 $f(x, y)$在平面区域 $D$ 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P_0(x_0, y_0)\in D$，都可定出一个向量

$$f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j},$$

这向量称为函数 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$的梯度，记作 $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$或$\nabla f(x_0, y_0)$，即

$$\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0, y_0)\boldsymbol{j}.$$

4．梯度与方向导数的关系

如果函数 $f(x, y)$在点 $P_0(x_0, y_0)$可微分，$\boldsymbol{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$是与方向 $l$ 同方向的单位向量，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} &= f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,\\ &= \mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)\cdot\boldsymbol{e}_l\\ &= |\,\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)|\cdot\cos(\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0),\hat{\ }\boldsymbol{e}_l).\end{aligned}$$

特别，当向量 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$的方向相同时，函数 $f(x, y)$增加最快. 即沿梯度方向时，方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$ 取得最大值，这个最大值就是梯度的模$|\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)|$. 也就是说：函数在一点的梯度是个向量，它的方向是函数在这点的方向导数中取得最大值的方向，它的模就等于方向导数的最大值. 而当 $\boldsymbol{e}_l$ 与 $\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)$的方向相反时，函数 $f(x, y)$减少最快，函数在这个方向的方向导数达到最小值$-|\mathbf{grad}\, f(x_0, y_0)|$.

## 9.4.3　典型例题

**【例 1】** 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 $P$ 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

**解**：曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处的两个法向量是

$$\pm(F_x,F_y,F_z)\big|_P=\pm(4x,6y,2z)\big|_P=\pm(4,6,2)$$

点 $P$ 位于第一卦限，椭球面在 $P$ 处的外法线的坐标均为正值，故可取 $\boldsymbol{n}=(2, 3, 1)$，单位化，得

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

又 $$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P=\frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\Big|_P=\frac{6}{\sqrt{14}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P=\frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\Big|_P=\frac{8}{\sqrt{14}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P=-\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\Big|_P=-\sqrt{14}$$

因此 $$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_P=\frac{2}{\sqrt{14}}\cdot\frac{6}{\sqrt{14}}+\frac{3}{\sqrt{14}}\cdot\frac{8}{\sqrt{14}}-\frac{1}{\sqrt{14}}\cdot\sqrt{14}=\frac{11}{7}$$

【例 2】 设 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $P_0(1,1,1)$，求

（1）$f(x,y,z)$ 在 $P_0$ 处沿平行于直线 $\begin{cases}x+y-z=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 且与 $z$ 轴正向成锐角的方向的方向导数；

（2）$f(x,y,z)$ 沿椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $P_0$ 的内法线方向的方向导数；

（3）$f(x,y,z)$ 沿球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的外法线方向的方向导数.

**解**：$\mathbf{grad}\, f=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$，故 $\mathbf{grad}\, f(1,1,1)=2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

（1）先确定方向 $\boldsymbol{l}$，依题意，有

$$\boldsymbol{l}//\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},$$

因 $\boldsymbol{l}$ 与 $z$ 轴正向成锐角，即 $\boldsymbol{l}$ 在 $z$ 轴上的分量应大于 0，故取 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，单位化，得

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\mathbf{grad}f(1,1,1)\cdot\boldsymbol{e}_l=2\sqrt{2}$$

（2）椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=6$ 在点 $P_0$ 的法线向量

$$\boldsymbol{n}//(2x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+6z\boldsymbol{k})\Big|_{(1,1,1)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},$$

因椭球面在 $P_0(1,1,1)$ 处的内法线方向与 $z$ 轴正向成钝角，故取 $\boldsymbol{n}=-2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，单位化，得

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=-\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}-\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}$$

方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{P_0}=\mathbf{grad}f(1,1,1)\cdot\boldsymbol{e}_n=-\frac{12}{\sqrt{14}}=-\frac{6}{7}\sqrt{14}$$

（3）本题一般用（2）的方法求解，但注意到球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ \ (a>0)$ 是函数 $f(x,y,z)$ 的一个等值面，其外法线方向指向 $f(x,y,z)$ 增加最快的方向，故

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{M_0}=\left|\mathbf{grad}f(x_0,y_0,z_0)\right|=\sqrt{(2x_0)^2+(2y_0)^2+(2z_0)^2}=2a$$

**评注**：此类题型应先求出题设所给的方向，然后相应求解. 同时应观察所给函数特征从而选取便捷的方法.

【例 3】 设在 $xOy$ 平面上，各点的温度 $T$ 与点的位置间的关系为 $T=4x^2+9y^2$，点 $P_0(9,4)$，求：

（1）$\mathbf{grad}T\Big|_{P_0}$；

（2）在点 $P_0$ 处沿极角为 $210^\circ$ 的方向 $\boldsymbol{l}$ 的温度变化率；

（3）在什么方向上点 $P_0$ 处的温度变化率取得：（i）最大值；（ii）最小值；（iii）零，并求此最大值与最小值.

**解**：（1）因为 $\left.\dfrac{\partial T}{\partial x}\right|_{P_0}=(8x)\Big|_{P_0}=72,\left.\dfrac{\partial T}{\partial y}\right|_{P_0}=(18y)\Big|_{P_0}=72$

故
$$\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}=72\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}$$

（2）点 $P_0$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的温度变化率即求 $\left.\dfrac{\partial T}{\partial l}\right|_{P_0}$，因此

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}\cdot(\cos\theta,\sin\theta)\Big|_{\theta=210^\circ}=\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{P_0}\cos 210^\circ+\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{P_0}\sin 210^\circ$$
$$=72\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+72\left(-\frac{1}{2}\right)=-36(\sqrt{3}+1)$$

（3）（i）温度 $T$ 在 $P_0$ 点的梯度方向 $\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}=72\boldsymbol{i}+72\boldsymbol{j}$ 就是点 $P_0$ 处温度变化率（即 $\left.\dfrac{\partial T}{\partial l}\right|_{P_0}$）取最大值的方向，且最大值为

$$\left|\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}\right|=72\sqrt{2}$$

（ii）温度 $T$ 在点 $P_0$ 的负梯度方向，即 $-\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}=-72\boldsymbol{i}-72\boldsymbol{j}$ 就是点 $P_0$ 处温度变化率取最小值方向，且最小值为

$$-\left|\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}\right|=-72\sqrt{2}$$

（iii）与 $P_0$ 处梯度垂直的方向即 $\boldsymbol{l}=\pm\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right)$ 就是点 $P_0$ 处温度变化率为零的方向，因为

$$\left.\frac{\partial T}{\partial l}\right|_{P_0}=\left|\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}\right|\cos(\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}\hat{,}\boldsymbol{l})=0 \text{ 当且仅当 } \boldsymbol{l}\perp\left.\mathbf{grad}T\right|_{P_0}$$

**【例 4】** 设有一表面光滑的橄榄球，它的表面形状是由长半轴为 6，短半轴为 3 的椭圆绕其长轴旋转所得旋转椭球面. 在无风的细雨天，将该球放在室外草坪上，设长轴在水平位置，问雨水从橄榄球的椭球面上流下的路线方程是什么？

分析：最速下降问题一般均与梯度方向有关，本题可看作梯度概念与微分方程在几何上的综合应用.

**解**：由题设，椭球面方程为（取 $y$ 轴为长轴）

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}=1$$

由于雨水会沿着它下降最快的方向向下流，此方向就是使它的方向导数取得最大值的方向，即

$$\mathbf{grad}\, z=z_x\boldsymbol{i}+z_y\boldsymbol{j}$$

设雨水流下的曲线为 $L$，$L$ 在 $xOy$ 面上的投影曲线的方程为

$$L_{xy}: f(x,y)=0$$

则 $L_{xy}$ 的切向量 $\boldsymbol{T}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$ 应与 $\mathbf{grad}\, z$ 平行，故 $\dfrac{\mathrm{d}x}{z_x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{z_y}$.

椭球面方程两边取全微分

$$\frac{2x}{9}\mathrm{d}x+\frac{2y}{36}\mathrm{d}y+\frac{2z}{9}\mathrm{d}z=0\text{，得 }\mathrm{d}z=-\frac{x}{z}\mathrm{d}x-\frac{y}{4z}\mathrm{d}y$$

于是

$$z_x=-\frac{x}{z},z_y=-\frac{y}{4z}.$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}x}{-\frac{x}{z}}=\frac{\mathrm{d}y}{-\frac{y}{4z}}\text{ 即 }\frac{\mathrm{d}x}{x}=4\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

解得 $x=Cy^4$（$C$ 可由雨滴的初始位置确定），故所求雨水的路线方程为

$$L:\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1\\ x=Cy^4\end{cases}$$

## 9.4.4　疑难释疑

1．“偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 及 $f_y(x_0,y_0)$ 分别是函数 $f(x, y)$在 $P_0(x_0,y_0)$ 处沿 $Ox$ 轴方向（$l=\boldsymbol{i}$）及沿 $Oy$ 轴方向（$l=\boldsymbol{j}$）的方向导数”．这种说法正确吗？

答：上述说法不正确. 事实上，依方向导数的定义，当 $l=\boldsymbol{i}$ 时，在 $P_0(x_0,y_0)$ 处

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

而
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

由此可见，前者是单侧极限，后者是双侧极限，两者并非一样. 若 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 存在，则 $f$ 沿方向 $l=\boldsymbol{i}$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 也存在，且两者相等；但反之，若 $\frac{\partial f}{\partial l}$ 存在，则 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 可能不存在. 例如，函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点 $O(0,0)$处沿 $l=\boldsymbol{i}$ 方向的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(0,0)}=1$，而 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在.

沿 $Ox$ 轴负方向（$l=-\boldsymbol{i}$），$f(x, y)$在 $P_0(x_0,y_0)$ 的方向导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}.$$

此时，当 $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ 存在时，有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地，沿 $Oy$ 轴方向（$l=\boldsymbol{j}$）的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 与偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 也不完全相同.

2．如果函数 $z=f(x,y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可偏导，但不可微分，$\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$，那么方向导数的计算公式

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

是否还成立？

答：不一定.

（1）当 $\cos\alpha\cdot\cos\beta=0$ 时，不妨设 $\cos\beta=0$，因 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，故 $\cos\alpha=\pm1$．此时，

若 $\cos\alpha=1$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0+t,\,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}=f_x(x_0,y_0)$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

若 $\cos\alpha=-1$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{f(x_0-t,\,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}$

$$=-\lim_{t'\to0^-}\frac{f(x_0+t',\,y_0)-f(x_0,y_0)}{t'}=-f_x(x_0,y_0)$$

$$=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

故此时计算公式仍成立.

（2）当 $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq0$ 时，计算公式不一定成立．例如，设 $f(x,y)=(xy)^{\frac{1}{3}}$，则 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$，但

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,\,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{(t^2\cos\alpha\cos\beta)^{\frac{1}{3}}}{t}=\infty.$$

3．如果函数 $f(x,\ y)$在点 $P_0(x_0,y_0)$ 沿各方向的方向导数都存在，那么能否断定 $f(x,\ y)$在点 $P_0$ 处连续？

答：不能.

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点（0,0）处沿任一方向 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(0,0)}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t\cos\alpha,\,t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha+t^2\cos^4\beta}=0$$

而 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{2x^2}=\dfrac{1}{2}\neq f(0,0)$，故 $f(x,y)$在点(0,0)处不连续.

该例表明，函数在某点处存在方向导数与函数是否连续无关. 因此教材第 102 页所给出的函数在某点处存在方向导数的条件是充分的，而非必要的.

## 9.4.5　部分习题解答

【习题 9-7】

2．求函数 $z=\ln(x+y)$在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1, 2)处，沿这抛物线在该点处偏向 $x$ 轴正向的切线方向的方向导数.

**解**：方程 $y^2=4x$ 两边对 $x$ 求导得 $2yy'=4$，解得 $y'=\dfrac{2}{y}$.

在抛物线 $y^2=4x$ 上点(1, 2)处，切线的斜率为 $y'(1)=1$，切向量为 $\boldsymbol{l}=(1, 1)$，单位切向量为 $\boldsymbol{e}_l=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=(\cos\alpha, \cos\beta)$.

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)}=\left.\frac{1}{x+y}\right|_{(1,2)}=\frac{1}{3},$$

故所求方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

3．求函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$在点$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$处沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.

**解**：令 $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$，则 $F_x=\dfrac{2x}{a^2}$，$F_y=\dfrac{2y}{b^2}$.

从而点$(x, y)$处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\pm(F_x, F_y)=\pm\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right).$$

在$\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}, \dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$处的内法向量为

$$\boldsymbol{n}=-\left.\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}\right)\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\left(\frac{\sqrt{2}}{a}, \frac{\sqrt{2}}{b}\right),$$

单位内法向量为

$$\boldsymbol{e}_n=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=(\cos\alpha, \cos\beta).$$

又因为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\left.\frac{2x}{a^2}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{a},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\left.\frac{2y}{b^2}\right|_{\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{b},$$

所以
$$\frac{\partial z}{\partial n}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{a}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{\sqrt{2}}{b}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{ab}\sqrt{a^2+b^2}.$$

6．求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)处，沿曲线在该点的切线正方向（对应于 $t$ 增大的方向）的方向导数.

**解：** 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上点(1, 1, 1)对应的参数为 $t=1$，在点(1, 1, 1)的切线正向为

$$\boldsymbol{l}=(1,\ 2t,\ 3t^2)|_{t=1}=(1,\ 2,\ 3),$$

$$\boldsymbol{e}_l=\frac{\boldsymbol{l}}{|\boldsymbol{l}|}=\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right),$$

又
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=2x|_{(1,1,1)}=2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)}=2y|_{(1,1,1)}=2,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)}=2z|_{(1,1,1)}=2,$$

所以
$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$
$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{12}{\sqrt{14}}.$$

7．求函数 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上点$(x_0, y_0, z_0)$处，沿球面在该点的外法线方向的方向导数.

**解：** 令 $F(x, y, z)=x^2+y^2+z^2-1$，则球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在点$(x_0, y_0, z_0)$处的外法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x,\ F_y,\ F_z)|_{(x_0,y_0,z_0)}=(2x_0,\ 2y_0,\ 2z_0),$$

$$\boldsymbol{e}_n=\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=(x_0,\ y_0,\ z_0)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma),$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial z}=1,$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$
$$=1\cdot x_0+1\cdot y_0+1\cdot z_0=x_0+y_0+z_0.$$

9．设 $u, v$ 都是 $x, y, z$ 的函数，$u, v$ 的各偏导数都存在且连续，证明

（2）**grad** $(uv)=v$**grad** $u+u$**grad** $v$;

**解：** $\mathbf{grad}(uv)=\dfrac{\partial(uv)}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial(uv)}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=\left(v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{i}+\left(v\frac{\partial u}{\partial y}+u\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(v\frac{\partial u}{\partial z}+u\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=v\,\mathbf{grad}\,u+u\,\mathbf{grad}\,v.$$

（3）$\mathbf{grad}\,(u^2)=2u\,\mathbf{grad}\,u$.

解：$\mathbf{grad}(u^2)=\dfrac{\partial u^2}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u^2}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u^2}{\partial z}\boldsymbol{k}$

$$=2u\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+2u\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+2u\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$=2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=2u\,\mathbf{grad}\,u.$$

10．求函数 $u=xy^2z$ 在点 $P_0(1,-1,2)$处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

解：$\mathbf{grad}\,u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{grad}\,u(1,\ -1,\ 2)=(y^2z\boldsymbol{i}+2xyz\boldsymbol{j}+xy^2\boldsymbol{k})\big|_{(1,-1,2)}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

$\mathbf{grad}\,u(1,-1,2)$为变化最快的方向，沿这个方向的方向导数为

$$|\mathbf{grad}\,u(1,\ -1,\ 2)|=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{21}.$$

## 9.4.6　练习题

1．选择题

（1）若函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在点 $(x,y)$ 的某邻域内具有连续的偏导数，则在该点的梯度 $\mathbf{grad}(uv)$等于（　　）

A．$u\,\mathbf{grad}\,v$　　B．$v\,\mathbf{grad}\,u$　　C．$(\mathbf{grad}\,u)(\mathbf{grad}\,v)$　　D．$u\,\mathbf{grad}\,v+v\,\mathbf{grad}\,u$

（2）设 $f(x, y)$在$(x_0, y_0)$邻域内存在偏导数且偏导数在$(x_0, y_0)$处不连续，则下列结论中正确的是（　　）

A．$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$处可微且 $\mathrm{d}f\big|_{(x_0,y_0)}=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$

B．$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$处不可微.

C．$f(x, y)$在$(x_0, y_0)$沿各个方向均存在方向导数.

D．曲线 $\begin{cases}z=f(x,y)\\x=x_0\end{cases}$ 在点$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$处的切线的方向向量是 $(0,1,f_y(x_0,y_0))$.

2．填空题

（1）函数 $u=\sqrt[x]{\dfrac{x}{y}}$ 在点(1, 1)的梯度为________.

（2）函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $M_0$（1,1）处沿与 $x$ 轴的正方向成 $\alpha=60^\circ$ 的方向导数为________.

（3）函数 $z=1-(x^2+2y^2)$ 在点 $M_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2}\right)$ 处沿曲线 $x^2+2y^2=1$ 在该点的内法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数为________.

3．设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $z=x^2+\dfrac{y^2}{2}$ 在点 $P(1,\ 2,\ 3)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\sqrt{\dfrac{3x^2+3y^2+z^2}{x}}$ 在 $P$ 点处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

4．求函数 $u=xy+yz+xz$ 在点 $M_0$（2,1,3）处沿与各坐标轴成等角方向的方向导数.

## 习题答案

1．（1）D　　（2）D

2．（1）$\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$　　（2）$1-\sqrt{3}$　　（3）$\sqrt{6}$

3．$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_P=-\dfrac{3}{4}\sqrt{6}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}\times\dfrac{2}{3}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\times\dfrac{1}{3}=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

4．$\left.\dfrac{\partial u}{\partial l_1}\right|_{M_0}=4\sqrt{3},\left.\dfrac{\partial u}{\partial l_2}\right|_{M_0}=-4\sqrt{3}$

## 9.4.7　考研真题

**【例 1】**（2008 年数一）　函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0, 1)处的梯度等于（　　）

A．$\boldsymbol{i}$　　B．$-\boldsymbol{i}$

C．$\boldsymbol{j}$　　D．$-\boldsymbol{j}$

**解：**应选（A）.

因为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ .　$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$ .

所以 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=1$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=0$，于是 $\left.\mathbf{grad}\,f(x,y)\right|_{(0,1)}=\boldsymbol{i}$．故应选（A）.

**【例 2】**（2005 年数一）　设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$，单位向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=$ ________.

**解：**应填 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

函数 $u(x,y,z)$沿单位向量 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为：

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{3}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{6}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{9}$，于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【例 3】（2012 年数一）　$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

解：应填 $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ .

$$\mathbf{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\left(y\boldsymbol{i}+\left(x-\frac{z}{y^2}\right)\boldsymbol{j}+\frac{1}{y}\boldsymbol{k}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

【例 4】（2002 数一）　设有一小山，取它的底面所在的平面为 $xOy$ 面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$ ，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$ .

（1）设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 $D$ 上一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上何方向的方向导数最大？若此方向的方向导数为 $g(x_0,y_0)$ ，写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式.

（2）现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚下寻找一山坡最大的点作为攀登的起点. 也就是说要在 $D$ 的边界线上找出使（1）中 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

解：（1）函数 $h(x,y)$ 在点 $M$ 处沿该点的梯度方向的方向导数最大，梯度为

$$\mathbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}=\left(\frac{\partial h}{\partial x},\frac{\partial h}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0,y_0)}=(-2x_0+y_0)\boldsymbol{i}+(-2y_0+x_0)\boldsymbol{j}$$

此时方向导数为：$\left|\mathbf{grad}h(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}\right|=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}$

（2）按题意,即求 $g(x,y)$ 在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点. 即

$$g^2(x,y)=(y-2x)^2+(x-2y)^2=5x^2+5y^2-8xy$$

在条件 $x^2+y^2-xy-75=0$ 下的最大值点.

这是求解条件极值问题，用拉格朗日乘数法.令拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75),$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=10x-8y+\lambda(2x-y)=0, & ①\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=10y-8x+\lambda(2y-x)=0, & ②\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-xy-75=0. & ③\end{cases}$$

解此方程组：将①式与②式相加得 $(x+y)(\lambda+2)=0.\Rightarrow x=-y$ 或 $\lambda=-2$.

若 $y=-x$ ，则由③式得 $3x^2=75$ 即 $x=\pm5,y=\mp5$. 若 $\lambda=-2$, 由①或②均得 $y=x$ ，代入③式得 $x^2=75$ 即 $x=\pm5\sqrt{3},y=\pm5\sqrt{3}$. 于是得可能的条件极值点

$$M_1(5,-5),M_2(-5,5),M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

现比较 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$ 在这些点的函数值:

$$f(M_1)=f(M_2)=450,f(M_3)=f(M_4)=150.$$

因为实际问题存在最大值，而最大值又只可能在 $M_1,M_2,M_3,M_4$ 中取到. 因此 $g^2(x,y)$ 在 $M_1,M_2$ 取到在 $D$ 的边界上的最大值，即 $M_1,M_2$ 可作为攀登的起点.

## 9.4.8 总习题九选讲

*4．证明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

解：因为 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x^2+x^4}=0$，

$$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^4}{y^4+y^4}=\dfrac{1}{2},$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

5．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $f_x(x,y), f_y(x,y)$.

解：当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$f_x(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2(x^2+y^2)-x^2y\cdot 2\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ 时

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0.$$

因此 $f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$,

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

6．求下列函数的一阶和二阶偏导数:

（2）$z=x^y$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y(y-1)x^{y-2}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^y\ln^2 x$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(yx^{y-1})=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x=x^{y-1}(1+y\ln x)$.

*8．设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，证明 $f(x,\ y)$在点(0，0)处连续且偏导数存在，但不可微分.

**证明**：因为 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\sqrt{x^2+y^2}$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)$，即 $f(x,y)$在点(0, 0)处连续.

因为 $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to}\dfrac{0}{\Delta x}=0$，

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta y\to}\dfrac{0}{\Delta y}=0$，

所以 $f(x,y)$在点(0, 0)处的偏导数存在.

因为 $\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}$，所以

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \Delta x=\Delta y}}\frac{\dfrac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^4}{[2(\Delta x)^2]^2}=\frac{1}{4}\neq 0,$$

所以 $f(x,y)$在点(0, 0)处不可微分.

11．设 $z=f(u,x,y)$, $u=xe^y$，其中 $f$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

**解**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+f'_x=\mathrm{e}^y f'_u+f'_x$，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^y f'_u+f'_x)=\mathrm{e}^y f'_u+\mathrm{e}^y\cdot\frac{\partial}{\partial y}(f'_u)+\frac{\partial}{\partial y}(f'_x)\\&=\mathrm{e}^y f'_u+\mathrm{e}^y\left(f''_{uu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{uy}\right)+\left(f''_{xu}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+f''_{xy}\right)\\&=\mathrm{e}^y f'_u+\mathrm{e}^y(x\mathrm{e}^y f''_{uu}+f''_{uy})+(x\mathrm{e}^y f''_{xu}+f''_{xy})\\&=\mathrm{e}^y f'_u+x\mathrm{e}^{2y}f''_{uu}+\mathrm{e}^y f''_{uy}+x\mathrm{e}^y f''_{xu}+f''_{xy}.\end{aligned}$$

12．设 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v, z=uv$，试求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

**解法一**：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=v\dfrac{\partial u}{\partial y}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

而由 $x=\mathrm{e}^u\cos v, y=\mathrm{e}^u\sin v$ 得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}u-\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}v\end{cases},$$

解得 $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=-\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}y$，

从而 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}\cos v$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\sin v$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-u}\sin v$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\cos v$.

因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=v\mathrm{e}^{-u}\cos v+u(-\mathrm{e}^{-u}\sin v)=\mathrm{e}^{-u}(v\cos v-u\sin v),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=v\mathrm{e}^{-u}\sin v+u\mathrm{e}^{-u}\cos v=\mathrm{e}^{-u}(v\sin v+u\cos v).$$

**解法二：**由 $x=\mathrm{e}^{u}\cos v, y=\mathrm{e}^{u}\sin v$ 得

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{u}\cos v\mathrm{d}u-\mathrm{e}^{u}\sin v\mathrm{d}v\\ \mathrm{d}y=\mathrm{e}^{u}\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^{u}\cos v\mathrm{d}v\end{cases},$$

解得 $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}v=-\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}y$.

又由 $z=uv$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v\mathrm{d}u\\&=v(\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}y)+u(-\mathrm{e}^{-u}\sin v\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}\cos v\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{e}^{-u}(v\cos v-u\sin v)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-u}(v\sin v+u\cos v)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而　$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{-u}(v\cos v-u\sin v)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}(v\sin v+u\cos v)$.

14．在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出这法线的方程.

**解：**已知平面的法线向量为 $\boldsymbol{n}_0=(1, 3, 1)$.

设所求的点为$(x_0, y_0, z_0)$，则曲面在该点的法向量为 $\boldsymbol{n}=(y_0, x_0, -1)$. 由题意知

$$\boldsymbol{n}//\boldsymbol{n}_0,\ \text{即}\ \frac{y_0}{1}=\frac{x_0}{3}=\frac{-1}{1},$$

于是 $x_0=-3, y_0=-1, z_0=x_0y_0=3$,

即所求点为$(-3, -1, 3)$，法线方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}.$$

15．设 $\boldsymbol{e}_l=(\cos\theta, \sin\theta)$，求函数 $f(x, y)=x^2-xy+y^2$ 在点$(1, 1)$沿方向 $l$ 的方向导数，并分别确定角 $\theta$，使这导数有（1）最大值，（2）最小值，（3）等于 0.

**解：**由题意知 $l$ 方向的单位向量为$(\cos\alpha, \cos\beta)=(\cos\theta, \sin\theta)$，即方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\theta, \cos\beta=\sin\theta.$$

因为

$$f_x(1, 1)=(2x-y)|_{(1,1)}=1,$$
$$f_y(1, 1)=(-x+2y)|_{(1,1)}=1,$$

所以在点$(1, 1)$沿方向 $l$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=f_x(1,\ 1)\cos\alpha+f_y(1,\ 1)\cos\beta=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right).$$

因此

（1）当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，方向导数最大，其最大值为 $\sqrt{2}$；

（2）当 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，方向导数最小，其最小值为 $-\sqrt{2}$；

（3）当 $\theta=\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $\dfrac{7\pi}{4}$ 时，方向导数为 0.

16．求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处沿外法线方向的方向导数.

**解**：椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$处的外法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{x_0}{a^2},\dfrac{y_0}{b^2},\dfrac{z_0}{c^2}\right)$，其单位向量为

$$\boldsymbol{e}_n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2},\frac{z_0}{c^2}\right).$$

因为

$$u_x(x_0, y_0, z_0)=2x_0,\ u_y(x_0, y_0, z_0)=2y_0,\ u_z(x_0, y_0, z_0)=2z_0,$$

所以，所求方向导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}&=u_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+u_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+u_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma\\&=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}\left(2x_0\cdot\frac{x_0}{a^2}+2y_0\cdot\frac{y_0}{b^2}+2z_0\cdot\frac{z_0}{c^2}\right)=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}+\dfrac{z_0^2}{c^4}}}.\end{aligned}$$

17．求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 的交线上与 $xOy$ 平面距离最短的点.

**解**：设 $M(x, y, z)$为平面和柱面的交线上的一点，则 $M$ 到 $xOy$ 平面的距离为 $d(x, y, z)=|z|$. 问题在于求函数 $f(x, y, z)=|z|^2=z^2$ 在约束条件 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和 $x^2+y^2=1$ 下的最小值.

作辅助函数：

$$F(x,y,z)=z^2+\lambda\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}-1\right)+\mu(x^2+y^2-1).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\lambda}{3}+2\mu x=0\\\dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{\lambda}{4}+2\mu y=0\\\dfrac{\partial F}{\partial z}=2z+\dfrac{\lambda}{5}=0\\\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1\\x^2+y^2=1\end{cases},$$

解方程组得

$$x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5},\ z=\frac{35}{12}\quad 或 \quad x=-\frac{4}{5},\ y=-\frac{3}{5},\ z=\frac{85}{12}.$$

易求得点$\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{35}{12}\right)$与 $xOy$ 平面距离最短（点$\left(-\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5},\ \frac{85}{12}\right)$与 $xOy$ 平面距离最长）.

18．在第一卦限内作椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的切平面，使该切平面与三坐标面所围成的四面体的体积最小，求这切平面的切点，并求此最小体积.

**解：** 令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$，则

$$F_x=\frac{2x}{a^2},\ F_y=\frac{2y}{b^2},\ F_z=\frac{2z}{c^2}.$$

椭球面上点 $M(x, y, z)$处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0\text{，即}\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}+\frac{zZ}{c^2}=1.$$

切平面在三个坐标轴上的截距分别为

$$X_0=\frac{a^2}{x},\ Y_0=\frac{b^2}{y},\ Z_0=\frac{c^2}{z}.$$

切平面与三个坐标面所围的四面体的体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}.$$

现将问题化为求函数 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 在条件$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最小值的问题，或求函数 $f(x, y, z)=xyz$ 在$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$下的最大值的问题.

作辅助函数 $F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$.

令
$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=yz+\frac{2\lambda x}{a^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=xz+\frac{2\lambda y}{b^2}=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}=xy+\frac{2\lambda z}{c^2}=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\end{cases},$$

解方程组得

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}.$$

于是，所求切点为$\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{y}{\sqrt{3}},\ \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$，此时最小体积为 $V=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

# 第 10 章　重　积　分

## 10.1　二重积分的概念、性质及计算法

### 10.1.1　基本要求

1．理解二重积分的概念

2．了解二重积分的几何意义与物理意义

3．了解二重积分的性质

4．掌握二重积分在直角坐标系与极坐标系下的计算方法

5．会利用对称性（被积函数的奇偶性、积分区域的对称性）解题

### 10.1.2　基本内容

**1．二重积分的定义**

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

此处 $f(x, y)$在有界闭区域 $D$ 上有界，$\Delta\sigma_i$ 既表示将 $D$ 任意分割为 $n$ 个小区域后的第 $i$ 个小区域，又表示第 $i$ 个小区域的面积；$(\xi_i,\eta_i)$ 是 $\Delta\sigma_i$ 上的任一点；$\lambda$ 是 $n$ 个小区域中的最大直径；无论对 $D$ 如何划分，$(\xi_i,\eta_i)$ 在 $\Delta\sigma_i$ 内如何取，与右端极限存在与否没有关系.

**2．二重积分的几何意义与物理意义**

（1）几何意义：

当 $f(x, y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 表示以 $z=f(x,y)$ 为顶，以 $D$ 为底的曲顶柱体的体积；特别地，当 $f(x, y)\equiv 1$ 时，$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = D$ 的面积.

（2）物理意义：

当 $f(x, y)$表示平面薄片 $D$ 的面密度时，$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 表示 $D$ 的质量.

**3．二重积分的性质（类似于定积分的性质）**

设 $f(x,y),g(x,y)$ 在 $D=D_1+D_2$ 上连续，则

（1）线性性

① 被积函数中的常数因子可提到积分号外面：

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \text{（}k\text{ 为常数）;}$$

② 有限个函数和的二重积分等于各函数二重积分的和：

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（2）区域可加性

函数在整个区域上的二重积分等于该函数在各部分无重叠小区域上的二重积分之和：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

（3）被积函数为 1 的二重积分等于积分区域的面积：

$$\iint_D 1\mathrm{d}\sigma = S_D = \sigma$$

（4）保号性

若 $f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$；

由此推得，函数的绝对值的二重积分≥函数二重积分的绝对值：

$$\iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma \geqslant \left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| .$$

（5）估值不等式

若 $f(x,y)$ 在 $D$ 上有最大值 $M$ 与最小值 $m$，则 $m\sigma \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \leqslant M\sigma$（$\sigma$ 为 $D$ 的面积）.

（6）积分中值定理

当被积函数在某区域上连续时，它在该区域上的二重积分等于此函数在该区域上某点处的值与区域面积之积：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi_i,\eta_i)\sigma \text{，或 } f(\xi,\eta) = \frac{1}{\sigma}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma .$$

**4．二重积分的计算方法**

（1）在直角坐标系中

① 若积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$（$X$ 型区域），如图 10-1-1，

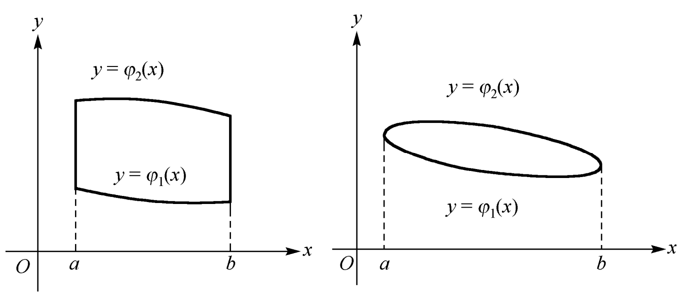



图 10-1-1

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$.

② 若积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$（$Y$ 型区域），如图 10-1-2，

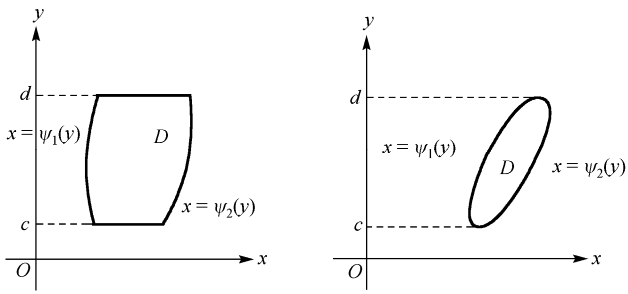



图 10-1-2

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$.

（2）在极坐标系中

① 若极点在积分区域 $D$ 外部：即 $D=\{(\rho,\theta)\,|\,\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta)\}$，如图 10-1-3，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$. ② 若极点在积分区域 $D$ 的边界上：即 $D=\{(\rho,\theta)\,|\,\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,0\leqslant\rho\leqslant\varphi(\theta)\}$，如图 10-1-4，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}$ $f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$.

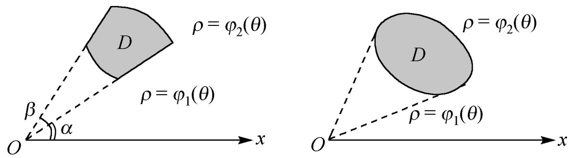



图 10-1-3

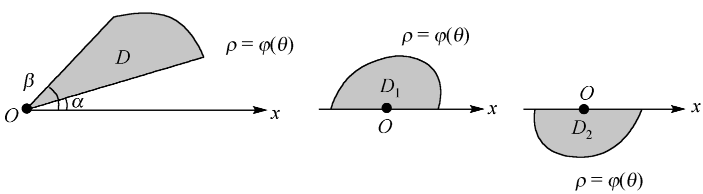



图 10-1-4

③ 若极点在积分区域 D 内部：即 $D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$ $0\leqslant\rho\leqslant\varphi(\theta)\}$，如图 10-1-5，

则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$.

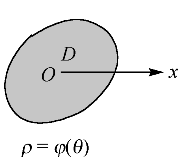



图 10-1-5

## 10.1.3　典型例题

【例 1】 根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$__________.（其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$）

**解**：由二重积分的几何意义，$\iint\limits_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示球心在圆点，半径为 $R$ 的上半球体的体积，故为 $\frac{2}{3}\pi R^3$. 应该填写：$\frac{2}{3}\pi R^3$.

**评注**：应熟练掌握二重积分的几何意义.

【例 2】比较二重积分 $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$ 的大小, 其中 $D$ 是三角形闭区域, 三顶点各为(1, 0), (1, 1), (2, 0).

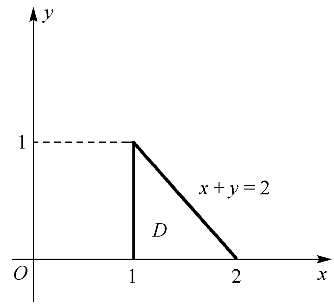


图 10-1-6

**解**：如图，三角形斜边方程为 $x+y=2$，

在 $D$ 内有 $1\leqslant x+y\leqslant 2<\mathrm{e}$，故 $0\leqslant \ln(x+y)<1$，

于是 $\ln(x+y)\geqslant [\ln(x+y)]^2$，

因此 $\iint\limits_D \ln(x+y)\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,\mathrm{d}\sigma$ .

**评注**：在同一积分区域内，比较两个二重积分的大小，实质上是比较两个被积函数在该积分区域上函数值的大小.

【例 3】 估计积分 $I=\iint\limits_D \sqrt{(x+y)xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值，其中 $D$ 是矩形区域 $0\leqslant x\leqslant 2$， $0\leqslant y\leqslant 2$ .

**解**：在区域 $D$ 上，由于 $0\leqslant x+y\leqslant 4$，$0\leqslant xy\leqslant 4$，所以（最小值）$0\leqslant\sqrt{(x+y)xy}\leqslant 4$（最大值），又 $\sigma=2\times2=4$，所以由估值不等式 $0=0\times4\leqslant\iint\limits_D\sqrt{(x+y)xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 4\times4=16$ .

**评注**：估计二重积分值关键是确定被积函数在积分区域 $D$ 上的最大值和最小值.

【例 4】 估计二重积分 $\boldsymbol{I}=\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中

$$D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\},\quad (0<b<a).$$

**解**：区域 $D$ 的面积 $\sigma=\pi ab$（椭圆面积公式），在 $D$ 上 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant a^2$，所以 $1=\mathrm{e}^0\leqslant \mathrm{e}^{x^2+y^2}\leqslant \mathrm{e}^{a^2}$，$\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ 在 $D$ 上的最大值 $M=\mathrm{e}^{a^2}$，最小值 $m=1$，由估值不等式 $\pi ab\leqslant\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\pi ab\mathrm{e}^{a^2}$.

**评注**：记住一些常用结论，例如本题中的椭圆面积公式，可以给解题带来极大的方便.

【例 5】计算二重积分 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 为抛物线 $y^2=x$ 和直线 $y=x-2$ 所围成的平面区域.

**解法一**：先画出区域 $D$ 的图形，如图 10-1-7. 易得交点坐标分别为(1, −1)、(4, 2)解法一：化为先对 $y$ 后对 $x$ 的累次积分. 这时，区域边界的下部是由两段不同的曲线组成，因此用直线 $x=1$ 将区域 $D$ 分为 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$ 和 $D_2=\{(x,y)|\ 1\leqslant x\leqslant 4, x-2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$ 两部分.

那么 $\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_1^4 x[x-(x-2)^2]\mathrm{d}x = \frac{45}{8}$$

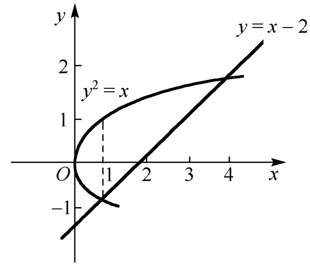



图 10-1-7

**解法二**：化为先对 $x$ 后对 $y$ 的累次积分.

这时 $D$ 可统一表示为

$$D = \{(x,y) | -1 \leqslant y \leqslant 2, y^2 \leqslant x \leqslant y+2\}$$

因此 $$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2} xy\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{2} y[(y+2)^2 - y^4]\mathrm{d}y = \frac{45}{8}.$$

**评注**：（1）显然，第二种解法较为简便.可见，无论怎样选择积分次序，其结果是相同的，但是选择的不同会影响计算过程的繁简，有时积分次序选择的不同可能造成二重积分不能计算.

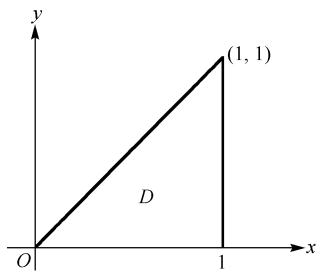



图 10-1-8

（2）计算直角坐标系下二重积分的步骤是:

1）画出区域 $D$ 的草图，根据图形的情况确定积分次序;

2）联立方程求交点，按积分的顺序确定积分上、下限;

3）代入公式计算积分值.

**【例 6】** 计算 $\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D$ 是由 $y=0, y=x, x=1$ 围成的闭区域.

**解**：先画出区域 $D$ 的图形，如图 10-1-8，

先对 $y$ 后对 $x$ 积分，则由 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x\}$ 知

$$\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1\frac{\sin x}{x}x\mathrm{d}x = \int_0^1\sin x\mathrm{d}x = -\cos 1 + 1$$

**评注**：如果先对 $x$ 后对 $y$ 积分，由于 $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示，这时重积分“积不出来”.

**【例 7】** 试更换 $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序.

**解**：题意即要把先对 $y$ 后对 $x$ 的积分更换为先对 $x$ 后对 $y$ 的积分.

由原累次积分的上、下限可得积分区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}, x\leqslant y\leqslant 1-x\right\}$

画出区域 $D$ 的图形，再由图形写出先对 $x$ 后对 $y$ 的积分域的不等式. 为此，作平行于 $x$ 轴的箭头穿区域 $D$，知先对 $x$ 后对 $y$ 积分必须将 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_2$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}, 0\leqslant x\leqslant y\right\}$，

$$D_2=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant x\leqslant 1-y\right\}$$

则 $I=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_0^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$

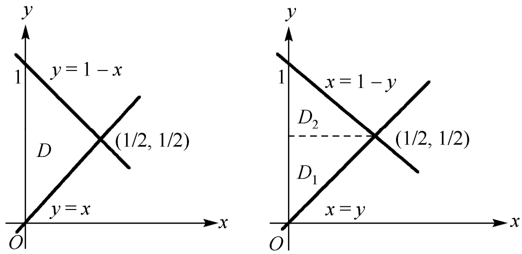



图 10-1-9

评注：由上面的例题可得更换积分次序的一般步骤为：

① 由原累次积分的上、下限列出表示积分域 $D$ 的联立双边不等式，例如

$$D=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$$

② 根据上述联立双边不等式画出区域 $D$ 的图形；

③ 按新的累次积分次序，列出与之相应的区域 $D$ 的联立双边不等式

$$D=\{(x,y)\,|\,c\leqslant y\leqslant d,\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)\}$$

④ 按③中的不等式组写出新的累次积分的表达式.

**【例 8】** 画出积分区域，把二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中区域 $D$ 是：（1）$x^2+y^2\leqslant 2x$；（2）$0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x$.

**解：**（1）积分区域 $D$ 的草图如图 10-1-10 所示：

其边界为半径为 1，圆心在 $(1,0)$ 点的圆周.将 $x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta$ 代入 $x^2+y^2=2x$，得它的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $D$ 可表示为：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant 2\cos\theta$. 任意取定 $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，作极角为 $\theta$ 的射线，在这条射线上，运动变化着的 $\rho$ 从 $\rho=0$ 穿入从 $\rho=2\cos\theta$ 穿出积分区域，所以 $[0,2\cos\theta]$ 为里层积分即对 $\rho$ 的积分区间.故

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$

（2）$D$ 的草图如图 10-1-11：

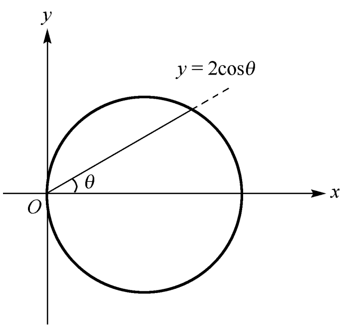



图 10-1-10

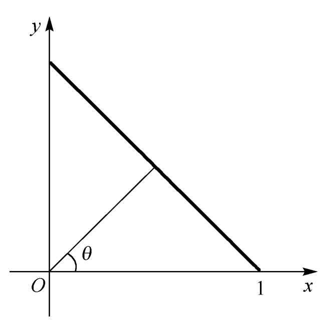



图 10-1-11

将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $y=1-x$ 得其极坐标方程为 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，$y=0,x=0$ 的极坐标表示分别为 $\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{2}$，这时 $D$ 可以表示为: $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 0\leqslant\rho\leqslant\dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$，

故：$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

**【例 9】** 计算下列二重积分：

（1）$I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 为：$x^2+y^2\leqslant 2ax, x^2+y^2\geqslant a^2, y\geqslant 0$

（2）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 为：$\sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$.

**解:**（1）积分区域 $D$ 的草图如图 10-1-12 所示.

从草图来看选用极坐标比较方便（若选用直角坐标，则无论选取 $D$ 为 $X-$ 型区域还是 $Y-$ 型区域都要分块）. 将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入 $x^2+y^2=2ax$ 与 $x^2+y^2=a^2$ 分别得它们的极坐标方程为 $\rho=a, \rho=2a\cos\theta$，它们交点的极坐标为 $\left(a,\dfrac{\pi}{3}\right)$. $D$ 的夹在 $\theta=0$（即 $y=0$）与 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 之间，即 $\theta$ 的变化范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，由极点 $O$ 引射线（其极角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$）穿过 $D$ 内，它由 $\rho=a$ 穿入由 $\rho=2a\cos\theta$ 穿出，则 $D$ 可表示为: $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}, a\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta$

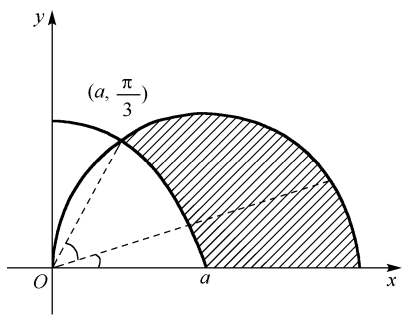



图 10-1-12

故：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_a^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_a^{2a\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\theta\sin\theta(16\cos^4\theta-1)\mathrm{d}\theta=-4a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^5\theta\mathrm{d}(\cos\theta)-\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\mathrm{d}(\sin\theta)$$

$$=\frac{9}{16}a^4.$$

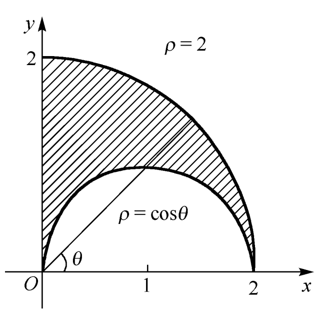



图 10-1-13

（2）积分区域草图如图 10-1-13 所示.

根据积分区域 $D$ 的边界曲线及被积函数含 $x^2+y^2$ 的特点，选取极坐标比较方便. $D$ 的边界曲线 $y=\sqrt{4-x^2}, y=\sqrt{2x-x^2}$，将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入得极坐标方程分别 $\rho=2$，$\rho=2\cos\theta$，$D$ 夹在 $y=0$ 及 $x=0$ 之间，即 $D$ 在射线 $\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 之间. 由极点引射线（极角 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$），它由边界 $\rho=2\cos\theta$ 穿入 $D$，由边界 $\rho=2$ 穿出 $D$，即 $D$ 用极坐标可表示为 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}, 2\cos\theta\leqslant\rho\leqslant 2$.

故 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}(2^4-2^4\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^4\theta)\mathrm{d}\theta=4\left[\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right]=\frac{5}{4}\pi$$

**评注**：当被积函数为 $f(x^2+y^2)$ 或积分区域为圆域，扇形域，圆环域时，可考虑利用极坐标系使计算简便.

**【例 10】** 计算 $I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}$，其中 $D$ 是由抛物线 $y=x^2$， $y=4x^2$ 及直线 $y=1$ 围成.

**解**：$\because I=\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma$，又区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，$D_1$ 为其右半部分.

$$f_1(x,y)=x=-f_1(-x,y)\ \ f_2(x,y)=y=f_2(-x,y)$$

$\therefore \iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=0$，$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}\sigma$

$\therefore I=\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}\sigma=2\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/2}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5}$

**评注**：

（1）如果积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数，即 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0;$$

（2）如果积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $x$ 是奇函数，即 $f(-x,y)=-f(x,y)$，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0.$$

（3）如果积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，$D_1$ 是 $D$ 的上半部分，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是偶函数，即 $f(x,-y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

（4）如果积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，$D_2$ 是 $D$ 的右半部分，而被积函数 $f(x,y)$ 关于 $x$ 是偶函数，即 $f(-x,y)=f(x,y)$，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=2\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$.

**【例 11】** 计算 $I=\iint\limits_D(x\sin y+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由抛物线 $y=x^2,y=4x^2$ 及直线 $y=1$ 所围成的闭区域.

**解**：积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，但被积函数 $f(x,y)=x\sin y+y$ 不是关于 $x$ 的奇（或偶）函数，故不能直接应用对称性计算二重积分，但是若设 $f_1(x,y)=x\sin y$， $f_2(x,y)=y$，则 $f_1(x,y)=x\sin y$ 是关于 $x$ 的奇函数，而 $f_2(x,y)=y$ 是关于 $x$ 的偶函数，记 $D_1$ 为区域 $D$ 的右半部分. 由对称性有

$$\iint\limits_D x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 y\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}x=\frac{2}{5},$$

故 $\iint\limits_D (x\sin y+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{2}{5}$

评注：计算二重积分时，巧妙运用对称性可以给计算带来方便.

## 10.1.4 释疑解难

1．在二重积分的定义中，最大的小区域直径 $\lambda\to 0$ 能否改成最大的小区域的面积 $\Delta\sigma\to 0$？

答：不能.因为最大的小区域的面积 $\Delta\sigma\to 0$ 不能保证所有小区域的直径 $\lambda_i\to 0$，也就是说，所有小区域的面积很小时，不能保证小区域内任意两点相隔很近，故不能保证小区域内任意两点的函数值相差很小.

2．二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是以 $z=f(x,y)$ 为顶，以 $D$ 为底的曲顶柱体的体积，对吗？

答：不对. 一般情况下，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义是以 $z=f(x,y)$ 为顶，以各部分区域为底的曲顶柱体的体积的代数和，其中在 $xOy$ 平面上方的柱体的体积取正，在 $xOy$ 平面下方的柱体的体积取负.只有当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的几何意义才是曲顶柱体的体积.

3．在计算二重积分时，如何选择恰当的坐标系（直角坐标、极坐标）？

答：在二重积分的计算中，选择恰当的坐标系是非常重要的. 其目的是简化计算，有时还可以解决在其他坐标系下解决不了的积分问题.

首先应优先考虑积分区域的边界线是用直角坐标方程还是用极坐标方程表示形式更为简单；其次再考虑被积函数是直角坐标变量还是用极坐标变量表示形式更为简单，据此原则选择坐标系.

一般的，当积分区域为圆形、圆环形或其部分区域时，应优先考虑选用极坐标系，当被积函数具有形如 $f(\sqrt{x^2+y^2})$，$f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 等形式时，也应优先考虑选用极坐标系，当积分区域和被积函数不具有上述情形时，一般选用直角坐标系.

4．计算二重积分时，如何确定累次积分的积分次序和积分的上、下限？

答：化二重积分为累次积分时，确定积分次序和积分上、下限是计算二重积分的关键步骤之一. 在选取恰当的坐标系后，应画出积分区域的平面图形.若选定的是直角坐标系，则考虑积分区域 $D$ 是 $X$ 型区域还是 $Y$ 型区域.若 $D$ 为 $X$ 型区域，则应先对变量 $y$ 积分，再对变量 $x$ 积分；若 $D$ 为 $Y$ 型区域，则应先对变量 $x$ 积分，再对变量 $y$ 积分.若选定的是极坐标系，则一般先对变量 $\rho$ 积分再对变量 $\theta$ 积分.在选定坐标系，确定积分次序后，再确定积分上、下限.二重积分中的上、下限与定积分中的不完全一样，定积分中积分上限可以大于下限也可以小于下限，但在计算二重积分时，积分上限一定大于下限. 应注意，当积分限是一函数表达式时，应依照自变量的不同取值范围比较其大小，进而确定上、下限.

5．二重积分的计算是通过二次积分来实现的，一般有三种方法（1）先积 $y$ 后积 $x(y\to x)$，（2）先积 $x$ 后积 $y(x\to y)$，（3）先积 $\rho$ 后积 $\theta$（$\rho\to\theta$），问:当一种方法积不出来时，另两种方法是否也积不出来？

答：不一定.

例如计算$\iint\limits_D \sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D: x\geqslant 1, y\leqslant 2, y-x+1\geqslant 0$，

若先积$y$，后积$x(y\to x)$：

$$\iint\limits_D \sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2\sin y^2\mathrm{d}y\text{，积不出，}$$

若改为先积$x$后积$y(x\to y)$：

$$\iint\limits_D \sin y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_1^{y+1}\sin y^2\mathrm{d}x=\int_0^2 y\sin y^2\mathrm{d}y=\frac{1-\cos 4}{2}.$$

又例如计算$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D: x^2+y^2\leqslant R^2$

用方法一，方法二，即在直角坐标下积不出，用方法三极坐标法（$\rho\to\theta$）：

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{e}^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

6．怎样利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性来简化二重积分的计算？

答：（1）设区域$D$关于$x$轴对称，$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, y\geqslant 0\}$，若$f(x,y)$在区域$D$上可积，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{为}y\text{的偶函数，}\\ 0, & f(x,y)\text{为}y\text{的奇函数}\end{cases}$$

（2）设区域$D$关于$y$轴对称，$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, x\geqslant 0\}$，若$f(x,y)$在区域$D$上可积，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)\text{为}x\text{的偶函数，}\\ 0, & f(x,y)x\text{的奇函数}\end{cases}$$

（3）设$D$关于$x$轴和$y$轴都对称，$D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，若$f(x,y)$在区域$D$上可积，则当$f(x,y)$同时满足关于$x$和$y$的偶函数特性时，有$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$；当$f(x,y)$满足关于$x$或$y$的奇函数特性时，有$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=0$

## 10.1.5　部分习题解答

【习题 10-1】

2. 设$I_1=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中$D_1=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1,-2\leqslant y\leqslant 2\}$，又$I_2=\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)^3\mathrm{d}\sigma$，其中$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 2\}$，试利用二重积分的几何意义说明$I_1$与$I_2$之间的关系.

**解：**由二重积分的几何意义知，$I_1$表示底为$D_1$，顶为曲面$z=(x^2+y^2)^3$的曲顶柱体$\Omega_1$的体积；$I_2$表示底为$D_2$，顶为曲面$z=(x^2+y^2)^3$的曲顶柱体$\Omega_2$的体积. 由于位于$D_1$上方的曲面$z=(x^2+y^2)^3$关于$yOz$面和$zOx$面均对称，故$yOz$面和$zOx$面将$\Omega_1$分成四个等积的部分，其中位于第一卦限的部分即为$\Omega_2$.由此可知$I_1=4I_2$.

4．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

（2）$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$与$\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$，其中积分区域$D$是由圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$所围成.

**解**：积分区域$D$的边界为圆周$(x-2)^2+(y-1)^2=2$，它与直线$x+y=1$相切于$x$轴上的点$(1,0)$，所以区域$D$位于直线的上方，故在$D$上，有$x+y\geqslant 1$，从而$(x+y)^2\leqslant(x+y)^3$，所以$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$.

5．利用二重积分的性质估计下列积分的值:

（2）$I=\iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y \mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant \pi, 0\leqslant y\leqslant \pi\}$

**解**：在区域$D$上，$0\leqslant \sin x\leqslant 1, 0\leqslant \sin y\leqslant 1$，从而$0\leqslant \sin^2 x\sin^2 y\leqslant 1$，又$D$的面积等于$\pi^2$，因此$0\leqslant \iint\limits_D \sin^2 x\sin^2 y \mathrm{d}\sigma \leqslant \pi^2$.

【习题 10-2】

2．画出积分区域，计算下列二重积分：

（1）$\iint\limits_D x\sqrt{y}\, \mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由$y=\sqrt{x}$，$y=x^2$所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y} \mathrm{d}\sigma$，其中$D=\{(x,y)\,\|\,x|+|y|\leqslant 1\}$.

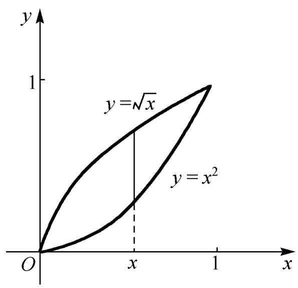



图 10-1-14

**解**：（1）D 可用不等式表示为

$$x^2\leqslant y\leqslant \sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1$$

于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\mathrm{d}\sigma=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1 x[y^{\frac{3}{2}}]_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int_0^1 (x^{\frac{7}{4}}-x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{6}{55}.$$

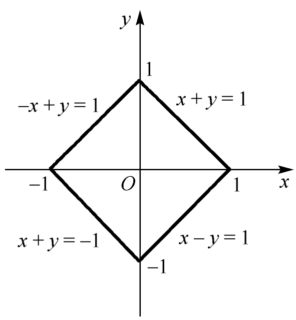



图 10-1-15

（3）如图，$D=D_1\cup D_2$，其中

$D_1=\{(x,y)\,|\,-x-1\leqslant y\leqslant x+1, -1\leqslant x\leqslant 0\}$;

$D_2=\{(x,y)\,|\,x-1\leqslant y\leqslant -x+1, 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

因此$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^0 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{-x-1}^{x+1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{x-1}^{-x+1}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y$

$$=\int_{-1}^0(\mathrm{e}^{2x+1}-\mathrm{e}^{-1})\mathrm{d}x+\int_0^1(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{2x-1})\mathrm{d}x=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}.$$

14．利用极坐标计算下列各题：

（1）$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=4$所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限的闭区域；

（3）$\iint\limits_D \arctan\dfrac{y}{x}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ 及直线 $y=0, y=x$ 所围成的在第一象限的闭区域.

**解：**（1）在极坐标系中，积分区域 $D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，
于是

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 \mathrm{e}^{\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\left[\frac{\mathrm{e}^{\rho^2}}{2}\right]_0^2=\pi(\mathrm{e}^4-1).$$

（2）在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 1, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，于是

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\ln(1+\rho^2)\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+\rho^2)\mathrm{d}(1+\rho^2)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left(\left[(1+\rho^2)\ln(1+\rho^2)\right]_0^1-\int_0^1 2\rho\mathrm{d}\rho\right)$$
$$=\frac{\pi}{4}(2\ln\ 2-1).$$

（3）在极坐标系中，积分区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,|\,1\leqslant\rho\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{4}\right\}, \arctan\dfrac{y}{x}=\theta$，于是

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D \theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)=\frac{3}{64}\pi^2.$$

15．选用适当的坐标计算下列各题：

（1）$\iint\limits_D \dfrac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是直线 $x=2, y=x$ 及曲线 $xy=1$ 所围成的闭区域；

（2）$\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的第一象限内的闭区域；

（3）$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由直线 $y=x, y+x+a, y=a, y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域；

（4）$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是圆环形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\right\}$.

**解：**（1）$D$ 如图 10-1-16 所示，根据 $D$ 的形状，选用直角坐标较宜.

$D=\left\{(x,y)\,|\,1\leqslant x\leqslant 2, \dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant x\right\}$，故

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\mathrm{d}y=\int_1^2(-x+x^3)\mathrm{d}x=\frac{9}{4}.$$

（2）根据积分区域 $D$ 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜.

$D=\left\{(\rho,\theta)\,|\,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，故

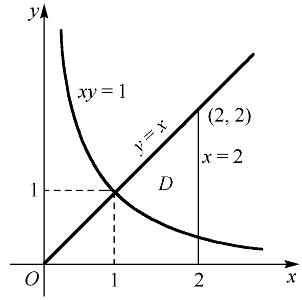



图 10-1-16

$$原式=\iint_D\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\sqrt{1+\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\int_0^1\frac{1-\rho^2}{\sqrt{1-\rho^4}}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\left(\int_0^1\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho-\int_0^1\frac{\rho^3}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}\rho^2+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-\rho^4}}\mathrm{d}(1-\rho^4)\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\left[\frac{1}{2}\arcsin\rho^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-\rho^4}\right]_0^1\right)=\frac{\pi}{8}(\pi-2).$$

（3）$D$ 如图所示，选用直角坐标为宜. 又根据 $D$ 的边界曲线的情况，宜采用先对 $x$，后对 $y$ 的积分次序，于是

$$\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}y=14a^4.$$

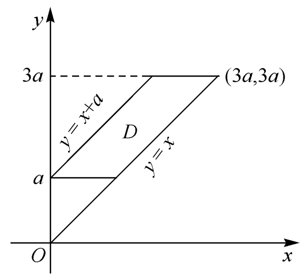



图 10-1-17

（4）本题显然适于用极坐标计算.

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,a\leqslant\rho\leqslant b,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}.$$

$$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint_D\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_a^b\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}(b^3-a^3)=\frac{2}{3}\pi(b^3-a^3).$$

16．设平面薄片所占的闭区域 $D$ 由螺线 $\rho=2\theta$ 上一段弧 $(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2})$ 与直线 $\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 所围成，它的面密度 $\mu(x,y)=x^2+y^2$，求该薄片的质量.

**解：**薄片的质量 $M$ 为它的面密度在薄片所占区域 $D$ 上的二重积分，即

$$M=\iint_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta^4\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^5}{40}.$$

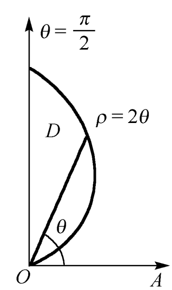



图 10-1-18

## 10.1.6　练习题

1．填空题

（1）$x^2+y^2=R^2$ 及 $y^2+z^2=R^2$ 围成的空间立体 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影域为________，上顶的函数表达式 $z=$______，下底的函数表达式 $z=$______，体积 $V$ 可以用二重积分表示成________.

（2）根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$________（其中 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+(y-2)^2\leqslant 4\right\}$）

（3）根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=$________（其中 $D=\left\{(x,y)\middle|\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$）

（4）交换下列二次积分的积分次序

① $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y}} f(x,y)\mathrm{d}x=$________

② $\int_0^2 \mathrm{d}y\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x=$________

③ $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\mathrm{d}x=$________

（5）积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的值等于________

（6）设 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$，则积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\sin^2(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________

2．选择题

（1）设 $I_1=\iint\limits_D\dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，

其中 $D=\left\{(x,y)\mid(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\right\}$，则________.

A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_2<I_3<I_1$　　C．$I_1<I_3<I_2$　　D．$I_3<I_2<I_1$

（2）设 $I_1=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}\sigma$，$i=1,2,3$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2R^2\right\}$，$D_3=\left\{(x,y)\mid |x|\leqslant R,|y|\leqslant R\right\}$，则________.

A．$I_1<I_2<I_3$　　B．$I_2<I_3<I_1$　　C．$I_1<I_3<I_2$　　D．$I_3<I_2<I_1$

3．根据二重积分的性质，解答下列各题

（1）试比较二重积分 $I_1=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D(x+y)^3\mathrm{d}\sigma$ 的大小，其中区域 $D$ 是由 $x$ 轴、$y$ 轴与直线 $x+y=1$ 所围成的闭区域.

（2）估计下列二重积分的值：

① $I=\iint\limits_D xy(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\}$；

② $I=\iint\limits_D(x+y+10)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 所围成.

4．计算下列二重积分.

（1）$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x,x^2+y^2\leqslant 2x\}$；

（2）$\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0,y=1$ 所围成的平面区域；

（3）$\iint\limits_D |y-x^2|\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

5．设 $f(x,y)$ 在积分域上连续，更换二次积分 $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序.

6．用二重积分计算立体 $\Omega$ 的体积 $V$，其中 $\Omega$ 由平面 $z=0$，$y=x$，$y=x+a$，$y=2a$ 和 $z=3x+2y$ 所围成 $(a>0)$.

7．设函数 $f(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且满足

$f(t)=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2}(x^2+y^2)f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+t^4$，求 $f(t)$.

## 习题答案

1．（1）$\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2\right\}$，$\sqrt{R^2-y^2}$，$-\sqrt{R^2-y^2}$，$2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{R^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$

（2）$4\pi$

（3）$6\pi$

（4）① $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{2-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

② $\int_0^4\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}}f(x,y)\mathrm{d}y$

③ $\int_{-2}^0\mathrm{d}x\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)\mathrm{d}y$

（5）$\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$

（6）$\pi-2$

2．（1）A （2）C

3．（1）$I_1\geqslant I_2$

（2）① $0\leqslant I\leqslant 2$ ② $8\pi\left(5-\sqrt{2}\right)\leqslant I\leqslant 8\pi\left(5+\sqrt{2}\right)$

4．（1）$\frac{10}{9}\sqrt{2}$.

利用极坐标

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\sin\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{10}{9}\sqrt{2}$$

（2）$\frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$

$$\iint_D x^2 y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} x^2 y\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int_0^1 y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_0^1 y(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}(1+y^2)\backslash$$

$$= \frac{2}{15}\left[(1+y^2)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 == \frac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$$

（3）$\dfrac{11}{30}$

$y=x^2$ 将 $D$ 划分为 $D_1$ 与 $D_2$ 两个部分.

其中
$$D_1 = \{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$
$$D_2 = \{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x^2\},$$

由区域可加性，
$$\iint_D |y-x^2|\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1}(y-x^2)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2}(x^2-y)\mathrm{d}\sigma$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^1 (y-x^2)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-y)\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{8}{30}+\frac{1}{10} = \frac{11}{30}$$

5．$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^3 \mathrm{d}x\int_0^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

6．$6a^3$

7．$\dfrac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)$

提示：从积分区域和被积函数的形式可见宜选极坐标计算.

$$f(t) = 2\iint_{\rho\leqslant t} \rho^2 f(\rho)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta + t^4 = 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t \rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho + t^4 = 4\pi\int_0^t \rho^3 f(\rho)\mathrm{d}\rho + t^4$$

两边求导得 $f'(t)=4\pi t^3 f(t)+4t^3 = 4t^3\left[\pi f(t)+1\right]$，所以 $\dfrac{f'(t)}{\pi f(t)+1} = 4t^3$ 边积分得 $\dfrac{1}{\pi}\ln\left[\pi f(t)+1\right]=t^4+C$，又由题设条件知 $f(0)=0$ 代入上式得 $C=0$，故

$$\frac{1}{\pi}\ln\left[\pi f(t)+1\right]=t^4 \Rightarrow f(t)=\frac{1}{\pi}(\mathrm{e}^{\pi t^4}-1)$$

## 10.1.7　考研真题

【例 1】（2001 年数一）　交换二次积分的积分次序：$\int_{-1}^0 \mathrm{d}y\int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

解：应填 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-1}^0 f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{-1}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$

评注：解此题的关键是正确地画出积分区域.

【例 2】（2004 年数一）　设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于（　　）

A．$2f(2)$　　B．$f(2)$　　C．$-f(2)$　　D．0

**解**：应选（B）

交换积分次序，得

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\left[\int_1^x f(x)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$$

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$.

**【例 3】**（2012 年数三） 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^2 f(\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=$（　　）

A. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

**解**：应选（B）

由 $2x\leqslant x^2+y^2$ 解得 $y$ 的下界为 $\sqrt{2x-x^2}$，由 $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$ 解得 $y$ 的上界为 $\sqrt{4-x^2}$．故排除答案（C）（D）．将极坐标系下的二重积分化为 $X$－型区域的二重积分得到被积函数为 $f(x^2+y^2)$，故选（B）.

**【例 4】**（2005 数三）设 $I_1=\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma, I_2=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma, I_3=\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，则（　　）.

A. $I_3>I_2>I_1$　　B. $I_1>I_2>I_3$　　C. $I_2>I_1>I_3$　　D. $I_3>I_1>I_2$

分析：关键在于比较 $\sqrt{x^2+y^2}$ 、$x^2+y^2$ 与 $(x^2+y^2)^2$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的大小.

**解**：应选（A）.

在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上，有 $0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$，从而有

$$\frac{\pi}{2}>1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\geqslant x^2+y^2\geqslant(x^2+y^2)^2\geqslant 0$$

由于 $\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为单调减函数，于是

$$0\leqslant\cos\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\cos(x^2+y^2)\leqslant\cos(x^2+y^2)^2$$

因此 $\iint\limits_D\cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma<\iint\limits_D\cos(x^2+y^2)^2\mathrm{d}\sigma$，故应选（A）.

**【例 5】**（2009 年数一） 如图 10-1-19，正方形 $\left\{(x,y)\middle||x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\right\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$，$I_k=\iint\limits_{D_k}y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$（　　）

A. $I_1$　　B. $I_2$　　C. $I_3$　　D. $I_4$

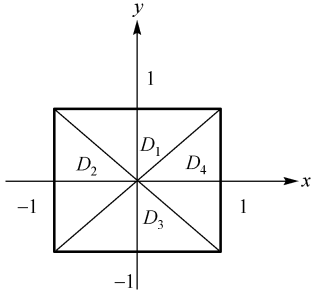


图 10-1-19

**解**：应选（A）.

本题利用二重积分区域的对称性及被积函数的奇偶性.

$D_2,D_4$ 两区域关于 $x$ 轴对称，而 $f(x,-y)=-y\cos x=-f(x,y)$，即被积函数是关于 $y$ 的奇函数，所以 $I_2=I_4=0$；

$D_1,D_3$ 两区域关于 $y$ 轴对称，而 $f(-x,y)=y\cos(-x)=y\cos x=f(x,y)$，即被积函数是关于 $x$ 的偶函数，所以 $I_1=2\iint\limits_{\{(x,y)|x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0$；

$I_3=2\iint\limits_{\{(x,y)|-1\leqslant y\leqslant -x,0\leqslant x\leqslant 1\}} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0$. 所以正确答案为（A）.

【例 6】(2006 年数一）设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$ 等于（　　）.

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

**解**：应选（C）.

本题首先由题设画出积分区域的图形，然后化为直角坐标系下累次积分即可. 由题设可知积分区域 $D$ 如图 10-1-20 所示，显然是 $Y$ 型域，则原式 $=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

故选（C）.

【例 7】(2008 年数三）设函数 $f$ 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_{uv}$ 为图 10-1-21 中阴影部分，则 $\dfrac{\partial F}{\partial u}=$（　　）

A. $vf(u^2)$　　B. $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　　C. $vf(u)$　　D. $\dfrac{v}{u}f(u)$

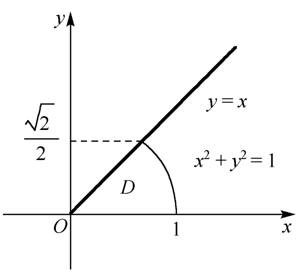



图 10-1-20

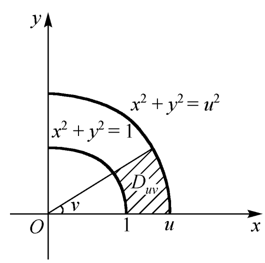



图 10-1-21

**解**：应选（A）.

用极坐标得　$F(u,v)=\iint\limits_D\dfrac{f(u^2+v^2)}{\sqrt{u^2+v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^v\mathrm{d}\theta\int_1^u\dfrac{f(\rho^2)}{\rho}\rho\mathrm{d}\rho=v\int_1^u f(\rho^2)\mathrm{d}\rho$

所以　$\dfrac{\partial F}{\partial u}=vf(u^2)$.

【例 8】(2010 年数一）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\sum\limits_{j=1}^n\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　　）

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　D. $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

**解**：应选（D）.

因为 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\cdot\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}$

而 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

故应选（D）.

**【例 9】**（2008 年数三）　计算 $\iint\limits_D \max(xy,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 2\}$.

**解**：曲线 $xy=1$ 将区域分成两个区域 $D_1$ 和 $D_2+D_3$，为了便于计算继续对区域分割，最后为

$$\begin{aligned}&\iint\limits_D \max(xy,1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^2 1\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{x}}1\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2 xy\mathrm{d}y\\&=1+2\ln 2+\frac{15}{4}-\ln 2\\&=\frac{19}{4}+\ln 2\end{aligned}$$

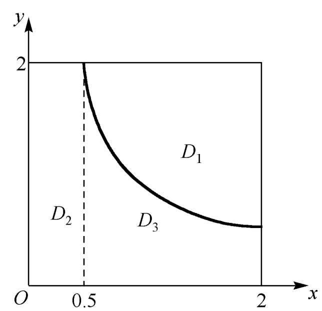


图 10-1-22

**【例 10】**（2012 年数三）　计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D$ 为由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围区域.

**解**：由题意知，区域 $D=\left\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，如图 10-1-23 所示. 所以

$$\iint\limits_D \mathrm{e}^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{x\to 0^+}\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{e}^x xy\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\int_0^1\mathrm{e}^x x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$$

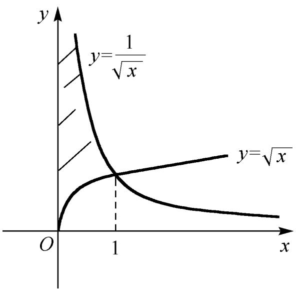



图 10-1-23

$$=\lim_{x\to0^+}\int_0^1 e^x x\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\int_0^1 e^x dx-\int_0^1 e^x x^2 dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(e-1-[e^x x^2]_0^1+2\int_0^1 e^x x dx\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(-1+2\int_0^1 x de^x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(-1+2\left([e^x x]_0^1-\int_0^1 e^x dx\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}(-1+2(e-(e-1)))=\frac{1}{2}$$

**【例 11】**（2007 数三） 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2. & |x|+|y|\leqslant 1.\\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1\leqslant|x|+|y|\leqslant 2.\end{cases}$$

计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\leqslant 2\}$.

分析：由于积分区域关于 $x,y$ 轴均对称，所以利用二重积分的对称性结论简化所求积分.

**解**：因为被积函数关于 $x,y$ 均为偶函数，且积分区域关于 $x,y$ 轴均对称，所以

$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma$，其中 $D_1$ 为 $D$ 在第一象限内的部分.

而
$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{\substack{x+y\leqslant1\\x\geqslant0,y\geqslant0}} x^2 d\sigma+\iint\limits_{\substack{1\leqslant x+y\leqslant2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$
$$=\int_0^1 dx\int_0^x x^2 dy+\left(\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dy\right)$$
$$=\frac{1}{12}+\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\frac{1}{3}+4\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})$.

**评注**：被积函数包含 $\sqrt{x^2+y^2}$ 时，可考虑用极坐标，解答如下:

$$\iint\limits_{\substack{1\leqslant x+y\leqslant2\\x\geqslant0,y\geqslant0}} f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{\substack{1\leqslant x+y\leqslant2\\x\geqslant0,y\geqslant0}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{\frac{2}{\sin\theta+\cos\theta}}d\rho$$
$$=\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}).$$

**【例 12】**（2005 数三）　计算二重积分 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right| \mathrm{d}\sigma$，其中

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

分析：被积函数含有绝对值，应当作分区域函数看待，利用积分的可加性分区域积分即可.

**解**：记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1,(x,y)\in D\right\}$，

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\right\},$$

于是 $\iint\limits_D \left|x^2+y^2-1\right|\mathrm{d}\sigma=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1(\rho^2-1)\rho\mathrm{d}\rho+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{8}+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(x^2+y^2-1)\mathrm{d}y+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

**【例 13】**（2004 数三）　求 $\iint\limits_D\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域(如图 10-1-24 所示).

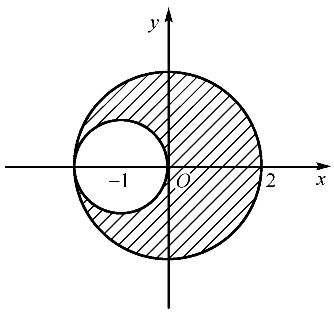


图 10-1-24

分析：首先，将积分区域 $D$ 分为大圆

$D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\}$ 减去小圆

$$D_2=\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\leqslant 1\},$$

再利用对称性与极坐标计算即可.

**解**：令 $D_1=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\},D_2=\{(x,y)\,|\,(x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$，

由对称性，$\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma=0$.

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma-\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\mathrm{d}\rho-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho.$$

$$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2)$$

所以，$\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\dfrac{16}{9}(3\pi-2)$.

**评注**：本题属于在极坐标系下计算二重积分的基本题型，对于二重积分，经常利用对称性将一个复杂区域划分为两个或三个简单区域来简化计算.

**【例 14】**（2005 年数一）　设 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：令 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant x^2+y^2<1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，

$D_2=\{(x,y)|1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$.

则 $$\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}=\frac{7}{8}.$$

【例 15】（2006 年数一） 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0\right\}$，计算 $I=\iint\limits_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：由对称性，$\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

所以 $I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}\ln[1+\rho^2]_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$

【例 16】（2002 年数一） 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

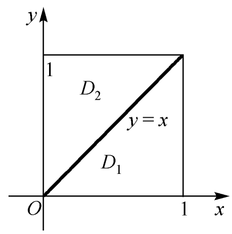



图 10-1-25

解： $D$ 是正方形区域如图 10-1-25. 因在 $D$ 上被积函数分块表示

$$\max\{x^2,y^2\}=\begin{cases}x^2,x\geqslant y,\\ y^2,x\leqslant y,\end{cases}(x,y)\in D,$$

于是要用分块积分法，用 $y=x$ 将 $D$ 分成两块：

$$D=D_1\cup D_2,D_1=D\cap\{y\leqslant x\},D_2=D\cap\{y\geqslant x\}.$$

$$I=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$（ $D$ 关于 $y=x$ 对称）

$$=2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}y$$（选择积分顺序） $$=2\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=[\mathrm{e}^{x^2}]_0^1=\mathrm{e}-1.$$

【例 17】（2011 年数一） 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续的偏导数，且 $f(1,y)=f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$，其中 $D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解：将二重积分 $\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 转化为累次积分可得

$$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$$

首先考虑 $\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x$，注意这里是把变量 $y$ 看常数的，故有

$$\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x = y\int_0^1 x\mathrm{d}f'_y(x,y) = \left[xyf'_y(x,y)\right]_0^1 - \int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x = yf'_y(1,y) - \int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

由 $f(1,y)=f(x,1)=0$ 易知 $f'_y(1,y)=f'_x(x,1)=0$

故 $\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x$

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x$$

对该积分交换积分次序可得 $-\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}x = -\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y$

再考虑积分 $\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y$，注意这里是把变量 $x$ 看做常数的，故有

$$\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 y\mathrm{d}f(x,y) = [yf(x,y)]_0^1 - \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = -\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 yf'_y(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = a$$

**评注**：本题考查二重积分的计算. 计算中主要利用分部积分法将需要计算的积分式化为已知的积分式，出题形式较为新颖，有一定的难度.

# 10.2 三重积分的概念、性质及计算法

## 10.2.1 基本要求

1．理解三重积分的概念
2．了解三重积分的几何意义与物理意义
3．掌握三重积分在直角坐标、柱面坐标及球面坐标系下的计算方法

## 10.2.2 基本内容

**1．三重积分的定义**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v \overset{\Delta}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

此处 $f(x, y, z)$ 在空间闭区域 $\Omega$ 上有界，$\Delta v_i$ 既表示将 $\Omega$ 任意分割为 $n$ 个小区域后的第 $i$ 个小区域，又表示第 $i$ 个小区域的体积；$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 是 $\Delta v_i$ 上的任一点；$\lambda$ 是 $n$ 个小区域的最大直径；无论对 $\Omega$ 如何划分，$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 在 $\Delta v_i$ 内如何取，与右端极限存在与否没有关系.

**2．三重积分的几何意义与物理意义**

（1）几何意义：

当 $f(x, y, z)\equiv 1$ 时，$\iint_\Omega \mathrm{d}v = \Omega$ 的体积.

（2）物理意义：

当 $f(x, y, z)$表示空间立体 $\Omega$ 的体密度时，$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 表示 $\Omega$ 的质量.

3．三重积分的计算方法

（1）在直角坐标系中

① 投影法：若积分区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_{xy},z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y)\right\}$，这里 $D_{xy}$ 为 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影，$z=z_1(x,y)$ 与 $z=z_2(x,y)$ 分别为 $\Omega$ 的下界面与上界面的方程，

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ .

② 截面法：若积分区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid c_1\leqslant z\leqslant c_2,(x,y)\in D_z\}$，这里 $D_z$ 是竖坐标恒为 $z$ 的平面截 $\Omega$ 时所得的截面，则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\left[\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$ .

（2）在柱面坐标系中

若积分区域 $\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta,\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta),z_1(\rho,\theta)\leqslant z\leqslant z_2(\rho,\theta)\}$，

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{\alpha}^{\beta}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\mathrm{d}z$，这里 $z=z_1(\rho,\theta)$ 与 $z=z_2(\rho,\theta)$，分别为 $\Omega$ 的下界面、上界面的柱面坐标方程.

（3）在球面坐标系中

若积分区域 $\Omega=\{(r,\varphi,\theta)\mid\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\varphi_1(\theta)\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2(\theta),r_1(\varphi,\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\varphi,\theta)\}$，

则 $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$ .

这里 $r=r_1(\varphi,\theta)$ 与 $r=r_2(\varphi,\theta)$ 分别为 $\Omega$ 上离原点较近和较远的界面的球坐标方程.

## 10.2.3　典型例题

**【例 1】** 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ ,其中 $\Omega$ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面 $x=0,y=0,z=0$ 围成的闭区域.

**解:** 方法一:“投影法”（1）画出 $\Omega$ 及其在 $xOy$ 面投影域 $D_{xy}$ .

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x\}$$

（2）“穿线” $0\leqslant z\leqslant 1-x-y$

所以

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$$

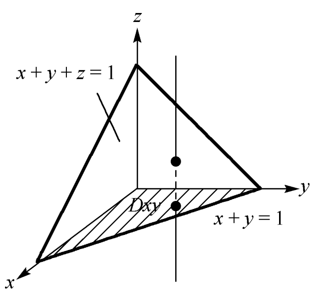



图 10-2-1

（3）计算

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} z\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{1}{2}(1-x-y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[(1-x)^2y-(1-x)y^2+\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left[x-\frac{3}{2}x^2+x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{24}$$

方法二："截面法"（1）画出$\Omega$；（2）$z\in[0,1]$过点$z$作垂直于$z$轴的平面截$\Omega$得$D_z$，$D_z$是两直角边为$x,y$的直角三角形，$x=1-z, y=1-z$；

（3）计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\left[\iint\limits_{D_z}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z=\int_0^1 z\left[\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z=\int_0^1 zS_{D_z}\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 z\left(\frac{1}{2}xy\right)\mathrm{d}z=\int_0^1 z\frac{1}{2}(1-z)(1-z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1(z-2z^2+z^3)\mathrm{d}z=\frac{1}{24}$$

**评注**：对三重积分，采用"投影法"还是"截面法"，要视积分域$\Omega$及被积函数$f(x, y, z)$的情况选取. 一般地，投影法（先一后二）：较直观易掌握；截面法（先二后一）：$D_z$是竖坐标为$z$的平面截闭区域$\Omega$所得到的平面区域，其边界曲线方程易写错，故较难一些.

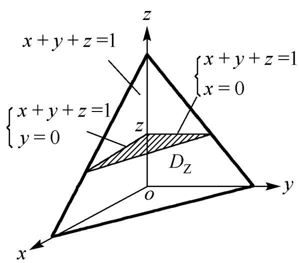



图 10-2-2

**【例 2】** 计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是$x^2+y^2=z^2$和$z=1$围成的闭区域.

**解**：方法一："投影法"

（1）画出$\Omega$及其在$xOy$面投影域$D_{xy}$（如图 10-2-3 所示），

由$\begin{cases}z^2=x^2+y^2\\ z=1\end{cases}$消去$z$，得$x^2+y^2=1$

即$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}\}$；

（2）"穿线" $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$，

所以　$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,-1\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\right\}$；

（3）计算

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{6}$$

方法二："截面法"

（1）画出$\Omega$（如图 10-2-4 所示）；

（2）$z\in[0,1]$，过点$(0, 0, z)$作垂直于$z$轴的平面截$\Omega$得

$$D_z：\ x^2+y^2\leqslant z^2，\quad 或\ D_z：\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\\ 0\leqslant r\leqslant z\end{cases}$$

用柱坐标计算

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta,z)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant z,0\leqslant z\leqslant 1\right\}$$

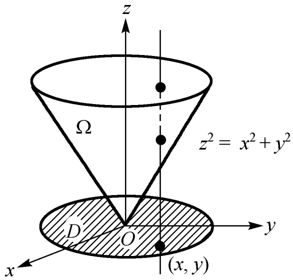



图 10-2-3

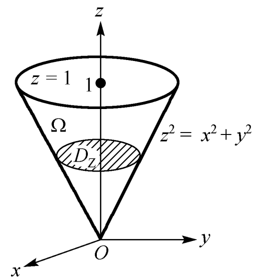



图 10-2-4

（3）计算

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v=\int_0^1\left[\iint\limits_{D_z}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z=\int_0^1\left[\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 2\pi\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^z\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi\int_0^1 z^3\mathrm{d}z=\frac{\pi}{6}$$

**评注：**对坐标系的选取，当$\Omega$为柱体，锥体，或由柱面，锥面，旋转抛物面与其他曲面所围成的形体；被积函数为仅含$z$或$zf(x^2+y^2)$时，可考虑用柱面坐标计算.

**【例 3】** 计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$由不等式$0\leqslant a\leqslant\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant A$，$z\geqslant 0$所确定.

**解：**用球坐标计算：由$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$得$\Omega$的边界曲面的球坐标方程：$a\leqslant r\leqslant A$.

$P\in\Omega$，连接$OP=r$，其与$z$轴正向的夹角为$\varphi$，$OP=r$，$P$在$xOy$面的投影为$P'$，连结$OP'$，其与$x$轴正向的夹角为$\theta$，所以$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},a\leqslant r\leqslant A\right\}$，

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_a^A(r^2\sin^2\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\left[\frac{1}{5}r^5\right]_a^A\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{5}(A^5-a^5)\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4\pi}{15}(A^5-a^5).$$

**评注：**为了简化积分的计算，还有如何选择适当的坐标系计算的问题.可以按以下几点考虑：将积分区域$\Omega$投影到$xOy$面，得投影区域$D_{xy}$（平面区域）；

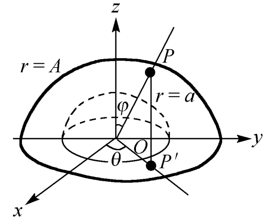



图 10-2-5

（1）$D_{xy}$是 X 型或 Y 型，可选择直角坐标系计算（当$\Omega$的边界曲面中有较多的平面时，常用直角坐标系计算）；

（2）$D_{xy}$是圆域（或其部分），且被积函数形如$f(x^2+y^2),f\left(\frac{y}{x}\right)$时，可选择柱面坐标系计算（当$\Omega$为圆柱体或圆锥体时，常用柱面坐标计算）；

（3）$\Omega$是球体或球顶锥体，且被积函数形如$f(x^2+y^2+z^2)$时，可选择球面坐标系计算.

## 10.2.4　疑难释疑

1．如果三重积分区域 $\Omega$ 是由曲面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围成的闭区域，则下列运算对吗？

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}R\mathrm{d}v=R\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^4$$

答：不对. 因为三重积分的积分区域是立体，并非仅仅是它的表面，所以本题的被积函数不仅要在球面上取值，而且要在球体内部取值，运算中的第一个等号是错误的. 正确的做法是：

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^3\mathrm{d}r=\pi R^4$$

2．三重积分的计算中如何利用积分区域的对称性及被积函数的奇偶性简化计算？设 $\Omega$ 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，则等式 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=0$ 成立吗？ $\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}v=0$ 呢？

答：在计算三重积分时，须将积分区域的对称性及被积函数的奇偶性正确配合，才能准确、简便地求出积分值.设 $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ .

如果 $\Omega$ 关于 $xOy$ 平面对称，$\Omega_1$ 为 $\Omega$ 位于 $z\geqslant 0$ 的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v, & \text{当 } f(x,y,-z)=f(x,y,z)\\ 0, & \text{当 } f(x,y,-z)=-f(x,y,z)\end{cases};$$

如果 $\Omega$ 关于 $yOz$ 平面对称，$\Omega_1$ 为 $\Omega$ 位于 $x\geqslant 0$ 的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v, & \text{当 } f(-x,y,z)=f(x,y,z)\\ 0, & \text{当 } f(-x,y,z)=-f(x,y,z)\end{cases};$$

如果 $\Omega$ 关于 $xOz$ 平面对称，$\Omega_1$ 为 $\Omega$ 位于 $y\geqslant 0$ 的部分，则

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}v=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1}f(x,y,z)\mathrm{d}v, & \text{当 } f(x,-y,z)=f(x,y,z)\\ 0, & \text{当 } f(x,-y,z)=-f(x,y,z)\end{cases}.$$

由于 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 关于 $yOz$ 平面对称，被积函数是关于 $x$ 的奇函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=0$ . 同理可以推出 $\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=0$ ，所以等式 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=0$ 是成立的.

由于 $\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 关于 $xOz$ 平面对称，而被积函数 $y^2$ 是关于 $y$ 的偶函数，所以 $\iiint\limits_{\Omega}y^2\mathrm{d}v\neq 0$ .

3．三重积分在柱坐标和球坐标系下计算与二重积分在极坐标系下计算有什么关系？

答：由于三重积分可视为先对积分变量 $z$ 做一次积分，再对积分变量 $x,y$ 做一次二重积分 $(z\to xy)$ 即

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \quad (*)$$

若对（*）中二重积分作极坐标变换：$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，便得到三重积分在柱坐标下的计算公式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)}\mathrm{d}\rho\int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho\mathrm{d}z \qquad (**)$$

若对（**）中积分变量$z,\rho$再作一次极坐标变换，$z=r\cos\varphi$，$\rho=r\sin\varphi$，便得到三重积分在球坐标下的计算公式：

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

总之，在三重积分的累次积分$(z\to xy)$中作一次极坐标变换便得到柱坐标下的计算公式：连续作二次极坐标变换便得到球坐标下的计算公式.

4．在用直角坐标计算三重积分时，可化为先一后二的三次积分计算，也可化为先二后一的三次积分联合计算，按积分变量排列顺序，他们又有多种方式，怎样在多种累次积分中选择最佳方案?

答：可以用例题说明.

如计算$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$，

利用对称性，$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=8\iiint\limits_{\Omega^*} z\mathrm{d}v$，其中$\Omega^*:x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$，$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

下面来分析$\iiint\limits_{\Omega^*} z\mathrm{d}v$的计算，

由于被积函数中仅含有$z$，故若把$z$作为后积变量时，在前两次积分中它都是常数，这种三次积分就比较简单，即计算方案$xy\to z$为佳. 进一步由于固定$z$时，截面面积$D(z)=\dfrac{1}{4}ab\left(1-\dfrac{z^2}{c^2}\right)\pi$，计算方案$xy\to z$就成了最佳方案.

## 10.2.5　部分习题解答

【习题 10-3】

1．化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分，其中积分区域$\Omega$分别是：

（1）由双曲抛物面$xy=z$及平面$x+y-1=0,z=0$所围成的闭区域；

（2）由曲面$z=x^2+2y^2$及$z=2-x^2$所围成的闭区域.

**解**：（1）$\Omega$的顶$z=xy$和底面$z=0$的交线为$x$轴和$y$轴，故$\Omega$在$xOy$面上的投影区域由$x$轴、$y$轴和直线$x+y-1=0$所围成. 于是$\Omega$可用不等式表示为

$$0\leqslant z\leqslant zy,0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{xy} f(x,y,z)dz.$$

（2）由 $z=x^2+y^2$ 和 $z=1$ 得 $x^2+y^2=1$，所以 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $x^2+y^2\leqslant 1$，$\Omega$ 可用不等式表示为

$$x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1,-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},-1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此

$$I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)dz.$$

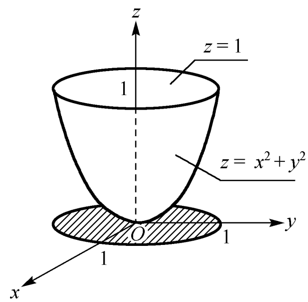



图 10-2-6

6．计算 $\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第一卦限内的闭区域.

**解法一：** 利用直角坐标计算.

由于

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-x^2-y^2},0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},0\leqslant x\leqslant 1\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\mathrm{d}z\\&=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\frac{1-x^2-y^2}{2}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}(1-x^2)-\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

**解法二：** 利用球面坐标计算.

由于

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\},$$

故

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_{\Omega}(r^3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\varphi\cos\theta)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^5\mathrm{d}r\\&=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^4\varphi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

9．利用柱面坐标计算三重积分

（1）$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域.

**解：**（1）由 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 $z$，得

$(x^2+y^2)^2=2-(x^2+y^2)$，即 $x^2+y^2=1$.

从而知 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$.

利用柱面坐标，$\Omega$ 可表示为

$$\rho^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是，

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(2-\rho^2-\rho^4)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}\right]_0^1=\frac{7}{12}\pi.$$

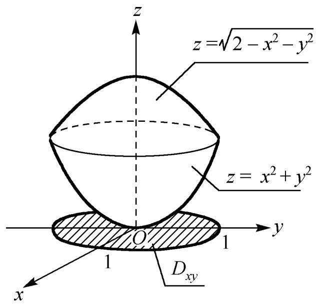



图 10-2-7

11．选用适当的坐标计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1$，$z=0,x=0$，$y=0$ 所围成的在第一卦限内的闭区域；

（2）$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 是由球面 $x^2+y^2+z^2=Z$ 的所围成的闭区域;

（3）$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

**解：**（1）利用柱面坐标计算. $\Omega$ 可表示为

$$0\leqslant z\leqslant 1,0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega} xy\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^1\mathrm{d}z$$

$$=\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1[z]_0^1=\frac{1}{8}.$$

*（2）在球面坐标系中，球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 的方程为 $r^2=r\cos\varphi$，即 $r=\cos\varphi$. $\Omega$ 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant\cos\varphi,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\cos^5\varphi}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{10}.$$

（3）利用柱面坐标计算．$\Omega$ 可表示为

$$\frac{5}{2}\rho\leqslant z\leqslant 5,0\leqslant\rho\leqslant 2,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\text{ ,}$$

于是

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{\frac{5}{2}\rho}^{5}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\left(5-\frac{5}{2}\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[\frac{5}{4}\rho^4-\frac{1}{2}\rho^5\right]_0^2=8\pi.$$

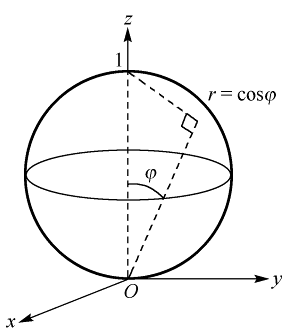



图 10-2-8

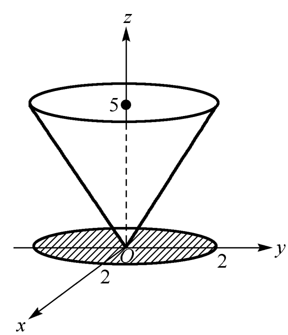



图 10-2-9

12．利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积：

（1）$z=6-x^2-y^2$ 及 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ .

**解**：（1）利用直角坐标计算．由 $z=6-x^2-y^2$ 和 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 消去 $z$，解得 $\sqrt{x^2+y^2}=2$，即 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域 $D_{xy}$ 为 $x^2+y^2\leqslant 4$ ．于是

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 6-(x^2+y^2),x^2+y^2\leqslant 4\right\}.$$

因此

$$V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)}\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}}\left[6-(x^2+y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（用极坐标）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(6-\rho^2-\rho)\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=2\pi\left[3\rho^2-\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2=\frac{32}{3}\pi.$$

## 10.2.6　练习题

1．填空题

（1）已知 $\Omega$ 是由 $x=0,y=0,z=0,x+2y+z=1$ 所围，按先 $z$ 后 $y$ 再 $x$ 的积分次序将 $I=\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为累次积分，则 $I=$________；

（2）设 $\Omega$ 是由球面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的围面，则三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 在球面坐标系下的三次积分表达式为________.

2．计算下列三重积分：

（1）$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt[3]{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$： $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$；

（2）$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成的闭区域；

（3）$I=\iiint\limits_{\Omega}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}v$，其中 $\Omega$ 是 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$， $x^2+y^2=1$ 及 $y=1$ 围成；

3．证明当 $f(z)$ 连续时，$\iiint\limits_{\Omega}f(z)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z$，

并用此公式计算 $\iiint\limits_{\Omega}(z^3+z^2+z+1)\mathrm{d}v$ 的值，其中 $\Omega$： $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$

4．证明：$\int_0^x\left[\int_0^v\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)\mathrm{d}t$

5．设函数 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $f(0)=0$，试求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\pi t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2}f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\mathrm{d}v$.

## 习题解答

1．（1）$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}x\mathrm{d}z$

（2）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$

2．（1）$\frac{12}{11}\pi$.

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^{\frac{2}{3}}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\cdot\left(\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\right)\cdot\left(\int_0^1 r^{\frac{8}{3}}\mathrm{d}r\right)=\frac{12}{11}\pi.$$

（2）$\frac{1}{8}$.

$$I=3\iiint_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x\mathrm{d}z=\frac{1}{8}.$$

（3）$\frac{28}{25}$.

$V$ 在 $xOz$ 面上投影区域 $D$：$x^2+z^2\leqslant 1$

$$I=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1-x^2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{y=1}\mathrm{d}x\mathrm{d}z=\iint_D\sqrt{1-x^2}\,\frac{x^2+z^2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{x^2+z^2}{z}\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{28}{25}.$$

3．$\frac{8}{5}\pi$

提示：由 $\Omega$ 的表面方程为 $x^2+y^2+z^2=1$ 知，$z\in[-1,1]$，既 $\Omega$ 在轴上的投影为线段 $[-1,1]$，在 $(-1,1)$ 内任取一点 $z$，过 $z$ 作垂直于 $z$ 轴的平面截 $\Omega$ 得一平面区域 $D_z$：$x^2+y^2\leqslant 1-z^2$．于是 $D_z$ 的面积为 $\pi(1-z^2)$．因此

$$\iiint_{\Omega}f(z)\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint_{D_Z}f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}f(z)\mathrm{d}z\iint_{D_Z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_{-1}^{1}f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z,$$

当 $f(z)=z^3+z^2+z+1$ 时，有 $\iiint_{\Omega}(z^3+z^2+z+1)\mathrm{d}v=\pi\int_{-1}^{1}(z^3+z^2+z+1)(1-z^2)\mathrm{d}z=\frac{8}{5}\pi$.

4．提示：从改变积分次序入手. $\int_0^v\mathrm{d}u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t=\int_0^v\mathrm{d}t\int_t^v f(t)\mathrm{d}u=\int_0^v(v-t)f(t)\mathrm{d}t$，所以

左边$=\int_0^x\mathrm{d}v\int_0^v(v-t)f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\mathrm{d}t\int_t^x(v-t)f(t)\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2f(t)\mathrm{d}t=$右边

5．$f'(0)$

原式$=\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\pi t^4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=\lim\limits_{t\to0}\frac{4\pi}{\pi t^4}\int_0^t f(r)r^2\mathrm{d}r=\lim\limits_{t\to0}\frac{4t^2f(t)}{4t^3}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0).$$

## 10.2.7　考研真题

**【例 1】**（2009 年数一）　设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant1\right\}$，则 $\iiint_{\Omega}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

**解**：$\frac{4}{15}\pi$.

方法一：
$$\iiint z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi r^2\cos^2\varphi\mathrm{d}r$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\mathrm{d}(-\cos\varphi)\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\cdot\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi}\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi$$

方法二：由轮换对称性可知 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

所以，$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$
$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi}{15}$$

**【例 2】**（2003 年数一） 设函数 $f(x)$连续且恒大于零，
$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}，\quad G(t)=\frac{\iint\limits_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_0^t f(x^2)\mathrm{d}x}，$$
其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\big|x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$， $D(t)=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

（1）讨论 $F(t)$在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

（2）证明：当 $t>0$ 时， $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

**解**：（1）因为
$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}，$$
$$F'(t)=2\frac{tf(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2}，$$
所以在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$ ，故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

（2）因
$$G(t)=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}，$$
要证明 $t>0$ 时 $F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$ ，只需证明 $t>0$ 时， $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$ ，即
$$\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2>0.$$
令
$$g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r-\left[\int_0^t f(r^2)r\mathrm{d}r\right]^2，$$

则 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\mathrm{d}r>0$，故 $g(t)$在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

因为 $g(t)$在 $t=0$ 处连续，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)$.

又 $g(0)=0$，故当 $t>0$ 时，$g(t)>0$,

因此，当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

**评注：**本题将定积分、二重积分和三重积分等多个知识点结合起来了，但难点是证明（2）中的不等式，事实上，这里也可用柯西积分不等式证明：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

在上式中取 $f(x)$为 $\sqrt{f(r^2)}r$，$g(x)$为 $\sqrt{f(r^2)}$ 即可.

# 10.3　重积分的应用

## 10.3.1　基本要求

1．掌握重积分的几何应用（空间曲面面积、空间立体图形的体积的计算）
2．了解重积分的物理应用（质心、转动惯量及引力的计算）

## 10.3.2　基本内容

**1．几何应用：**

（1）空间曲面的面积

空间曲面 $S$：$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 的面积 $A=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

（2）空间立体图形的体积

空间立体图形 $\Omega$ 的体积 $V=\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}v$

**2．物理应用：**

（1）质心（形心）

① 平面薄片的质心 $(\bar{x},\bar{y})$（也称为平面区域 $D$ 的形心）

其中：$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}$，　$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}$，

$\mu(x,y)$ 为面密度，D 为平面薄片所占的平面区域

② 空间物体的质心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$（也称为空间区域 $\Omega$ 的形心）

其中：$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，　$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，　$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_\Omega z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}$，

$\rho(x,y,z)$ 为体密度，$\Omega$ 为空间物体所占的空间区域

（2）转动惯量

① 平面薄片的转动惯量

对于 $x$ 轴 $I_x=\iint\limits_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 对于 $y$ 轴 $I_y=\iint\limits_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$

② 空间物体的转动惯量

对于 $x$ 轴 $I_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$

对于 $y$ 轴 $I_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$

对于 $z$ 轴 $I_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$

对于原点 $I_o=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v$

（3）引力

空间一物体对于物外一单位质量的质点 $(x_0,y_0,z_0)$ 处的的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，

其中　$F_x=\iiint\limits_\Omega \dfrac{G\rho(x,y,z)(x-x_0)}{r^3}\mathrm{d}v$，$F_y=\iiint\limits_\Omega \dfrac{G\rho(x,y,z)(y-y_0)}{r^3}\mathrm{d}v$，

$F_z=\iiint\limits_\Omega \dfrac{G\rho(x,y,z)(z-z_0)}{r^3}\mathrm{d}v$；$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$

## 10.3.3　典型例题

**【例 1】** 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积.

**解**：如图 10-3-1，上半球面的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

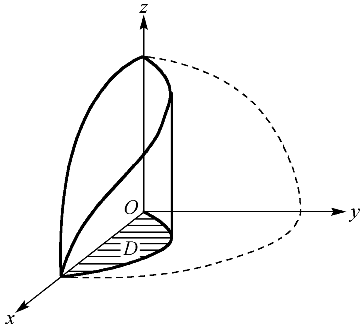


图 10-3-1

由曲面的对称性得所求面积为

$$A=4\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{（极坐标）}}4a\iint\limits_D\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=2a^2(\pi-2).$$

**评注**：要熟练掌握曲面的面积公式. 在计算二重积分时，合理利用极坐标使计算简便.

【例 2】 求由平面 $x=0, y=0, x+y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及抛物面 $x^2+y^2=6-z$ 截得的立体 $\Omega$ 的体积 $V$.

解:

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{6-x^2-y^2}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(6-x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[6y-x^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(6-6x-x^2+x^3-\frac{1}{3}(1-x)^3\right)\mathrm{d}x=\frac{17}{6}$$

评注：注意将空间立体图形的体积问题转化为三重积分的计算.

【例 3】 求上、下曲面分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围立体的体积.

解：由 $x^2+y^2+z^2=2$ 和 $z=x^2+y^2$ 消去 $z$，解得 $x^2+y^2=1$.

从而得立体 $\Omega$ 在 $xOy$ 面上的投影区域 $D_{xy}$ 为 $x^2+y^2\leqslant 1$.

于是

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2}, x^2+y^2\leqslant 1\right\}.$$

因此

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\sqrt{2-x^2-y^2}-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{（用极坐标）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\left(\sqrt{2-\rho^2}-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

评注：本题也可用“先重后单”的方法按下式方便地求得结果:

$$V=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}z\iint_{x^2-y^2\leqslant 2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_1^{\sqrt{2}}(2-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{4\sqrt{2}-5}{3}\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{8\sqrt{2}-7}{6}\pi.$$

【例 4】 一均匀物体（密度 $\rho$ 为常量）占有的闭区域 $\Omega$ 由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=0$，$|x|=a$，$|y|=a$ 所围成，

（1）求物体的体积;

（2）求物体的质心;

（3）求物体关于 $z$ 轴的转动惯量.

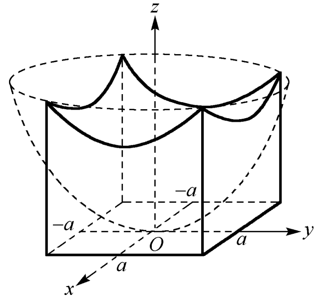



图 10-3-2

解：（1）如图 10-3-2，由 $\Omega$ 的对称性可知

$$V=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}\mathrm{d}z=4\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a(x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^a\left(ax^2+\frac{a^3}{3}\right)\mathrm{d}x=\frac{8}{3}a^4.$$

（2）由对称性可知，质心位于 $z$ 轴上，故 $\bar{x}=\bar{y}=0$.

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\rho z\mathrm{d}v\xlongequal{\text{对称性}}\frac{4}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}z\mathrm{d}z$$
$$=\frac{4}{V}\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\frac{1}{2}(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{V}\int_0^a\left(ax^4+\frac{2}{3}a^3x^2+\frac{1}{5}a^5\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{15}a^2.$$

所以质心坐标为$(0, 0, \frac{7}{15}a^2)$.

（3）$I_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x^2+y^2)\mathrm{d}v\xlongequal{\text{对称性}}4\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{x^2+y^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z$

$$=4\rho\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a(x^4+2x^2y^2+y^4)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{112}{45}\rho a^6.$$

**评注**：从以上例题看出，在计算立体的体积、质心和转动惯量时，可利用对称性来减少计算量.

**【例 5】** 设均匀柱体密度为$\rho$，占有闭区域$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2,0\leqslant z\leqslant h\}$，求它对于位于点$M_0(0,0,a)(a>h)$处的单位质量的质点的引力.

**解**：由柱体的对称性和质量分布的均匀性知$F_x=F_y=0$. 引力沿$z$轴的分量

$$F_z=\iiint\limits_{\Omega}G\rho\frac{z-a}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v$$
$$=G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{[x^2+y^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$\xlongequal{\text{柱面坐标}}G\rho\int_0^h(z-a)\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{r\mathrm{d}r}{[r^2+(z-a)^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$=2\pi G\rho\int_0^h(z-a)\left[\frac{1}{a-z}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$
$$=2\pi G\rho\int_0^h\left[-1-\frac{z-a}{\sqrt{R^2+(z-a)^2}}\right]\mathrm{d}z$$
$$=-2\pi G\rho\left[h+\sqrt{R^2+(h-a)^2}-\sqrt{R^2+a^2}\right].$$

故引力为$F=(0,0,F_z)$

**评注**：此题应注意到柱体的对称性和质量分布的均匀性.

## 10.3.4　释疑解难

1．设有一由$y=\ln x$，$y=0$及$x=\mathrm{e}$所围成的均匀薄片（密度为 1），问此薄片绕哪一条垂直于$x$轴的直线旋转时转动惯量最小?

答：$I(t)=\iint\limits_D (x-t)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}(x-t)^2\mathrm{d}x\int_0^{\ln x}\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}(x-t)^2\ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}(x-t)^3$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-t)^3\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}}-\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}(x-t)^3\mathrm{d}\ln x=\frac{1}{3}(\mathrm{e}-t)^3-\frac{1}{3}\int_1^{\mathrm{e}}\left(x^2-3xt+3t^2+\frac{t^3}{x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=t^2-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+1)t+\frac{2}{9}\mathrm{e}^3+\frac{1}{9}.$$

令 $I'(t)=2t-\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+1)=0$，得 $t=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$ .

由于 $I''\left(\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)\right)=2>0$，所以当 $t=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$ 时 $I(t)$ 最小.

2．密度均匀的圆环形薄片 $D$ 绕与 $D$ 垂直且过它的中心的轴旋转，问其转动惯量为多少？

答：设 $D$：$R_1^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R_2^2$，密度 $u(x,y)=C$（常数）.质量为 $m$，用极坐标计算，则转动惯量为

$$I=\iint\limits_D c\cdot(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma=c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{c\pi(R_2^4-R_1^4)}{2}=\frac{m(R_1^2+R_2^2)}{2}.$$

## 10.3.5　部分习题解答

【习题 10-4】

2．求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积.

**解**：由 $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2},\\ z^2=2x\end{cases}$ 解得 $x^2+y^2=2x$，故曲面在 $xOy$ 面上的投影区域

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2x\}$$

被割曲面的方程为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2},$$

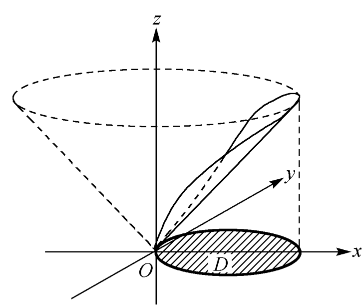


图 10-3-4

于是所求曲面的面积为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{2}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\sqrt{2}\pi.$$

4．设薄片所占的闭区域 $D$ 如下，求均匀薄片的质心：

（1）$D$ 由 $y=\sqrt{2px}$ , $x=x_0$ , $y=0$ 所围成；

（2）$D$ 是半椭圆形闭区域 $\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, y\geqslant 0\right\}$；

（3）$D$ 是介于两个圆 $\rho = a\cos\theta, \rho = b\cos\theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域.

**解**：（1）设质心为 $(\overline{x}, \overline{y})$.

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2px}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{2px_0^3};$$

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sqrt{2px_0^5};$$

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}}y\mathrm{d}y = \int_0^{x_0}px\mathrm{d}x = \frac{px_0^2}{2},$$

于是　$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5}x_0,\ \overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\sqrt{2px_0} = \frac{3}{8}y_0,$$

故所求质心为 $\left(\frac{3}{5}x_0, \frac{3}{8}y_0\right)$.

（2）因 $D$ 对称于 $y$ 轴，故质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 必位于 $y$ 轴上，于是 $\overline{x} = 0$.

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}y\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{A}\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{2a^2}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi ab}\cdot\frac{2}{3}ab^2 = \frac{4b}{3\pi}.$$

因此所求质心为 $\left(0, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

（3）由图 10-3-5 知 $D$ 对称于 $x$ 轴，故质心 $(\overline{x}, \overline{y})$ 位于 $x$ 轴上，于是 $\overline{y} = 0$.

$$A = \pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(b^2 - a^2),$$

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \rho\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{a\cos\theta}^{b\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho.$$
$$= \frac{2}{3}(b^3 - a^3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2}{3}(b^3 - a^3)\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}(b^3 - a^3),$$

故　$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^2 + ab + b^2}{2(a+b)}.$$

所求质心为 $\left(\dfrac{a^2+ab+b^2}{2(a+b)},0\right)$.

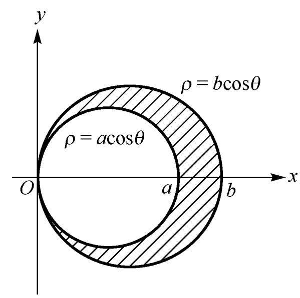



图 10-3-5

12．求半径为 $a$、高为 $h$ 的均匀圆柱体对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量（设密度 $\rho=1$）.

**解**：建立空间直角坐标系，使原点位于圆柱体的中心，$z$ 轴平行于母线，则圆柱体所占的空间闭区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant a^2,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}$$

$$\underline{\underline{\text{柱面坐标}}}\left\{(\rho,\theta,z)\,|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant a,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_x=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z=2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\cdot h=\frac{1}{2}\pi ha^4.$$

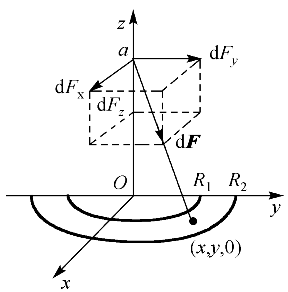



图 10-3-6

13．设面密度为常量 $\mu$ 的匀质半圆环形薄片占有闭区域 $D=\left\{(x,y,0)\,|\,R_1\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\leqslant R_2,x\geqslant 0\right\}$，求它对位于 $z$ 轴上点 $M_0(0,0,a)(a>0)$ 处单位质量的质点的引力 $\boldsymbol{F}$.

**解**：如图，引力元素 d$\boldsymbol{F}$ 沿 $x$ 轴和 $z$ 轴的分量分别为

$$\mathrm{d}F_x=G\frac{\mu x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

$$\mathrm{d}F_z=G\frac{\mu(-a)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma.$$

于是

$$F_x=G\mu\iint_D\frac{x}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sigma$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标}}}G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho\cos\theta}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=G\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$=2G\mu\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho\text{（令}\rho=a\tan t\text{换元）}$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}\frac{a^2\tan^2 t}{a^3\sec^3 t}\cdot a\sec^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2G\mu\int_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}(\sec t-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 2G\mu\left[\ln(\sec t + \tan t) - \sin t\right]_{\arctan\frac{R_1}{a}}^{\arctan\frac{R_2}{a}}$$

$$= 2G\mu\left[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right];$$

$$F_z = -Ga\mu\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\underline{\underline{\text{极坐标}}} - Ga\mu\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\rho$$

$$= \pi Ga\mu\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\right]_{R_1}^{R_2} = \pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)$$

由于 $D$ 关于 $x$ 轴对称，且质量均匀分布，故 $F_y = 0$. 因此引力，

$$\boldsymbol{F} = \left(2G\mu\left[\ln\frac{\sqrt{R_2^2+a^2}+R_2}{\sqrt{R_1^2+a^2}+R_1} - \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2+a^2}} + \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right], 0,\right.$$

$$\left.\pi Ga\mu\left(\frac{1}{\sqrt{R_2^2+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_1^2+a^2}}\right)\right).$$

## 10.3.6　练习题

1．求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及 $x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积.

2．计算由四个平面 $x=0, y=0, x=1, y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 及 $2x+3y+z=6$ 截得的立体 $\Omega$ 的体积 $V$.

3．设平面薄片所占的闭区域 $D$ 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成，它在点$(x, y)$处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$，求该薄片的质心.

4．设有一物体，由圆锥以及与这一锥体共底的半球拼成，而锥的高等于它的底半径 $a$，求该物体关于对称轴的转动惯量（ $\mu=1$ ）.

5．求密度均匀的圆柱体对其底面中心处单位质点的引力.

## 习题解答

1．$16R^2$

提示：所求表面积 $S$ 为位于第一卦限表面积的 8 倍，即

$$S = 16S_1 = 16\iint_D\sqrt{1+Z_x^2+Z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$= 16\int_0^R\frac{R\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2-x^2}}\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y = 16\int_0^R R\mathrm{d}x = 16R^2.$$

2．$V=\dfrac{7}{2}$

提示：

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{6-2x-3y}\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(6-2x-3y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_o^1\left[6y-2xy-\frac{3}{2}y^2\right]_0^1\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\frac{9}{2}-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{2}.$$

3．质心为$\left(\dfrac{35}{48},\dfrac{35}{54}\right)$

提示：$M=\iint_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y=\int_0^1\dfrac{1}{2}(x^4-x^6)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{35}$

$$M_x=\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y^2\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{3}(x^5-x^8)\mathrm{d}x=\frac{1}{54}$$

$$M_y=\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}y\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{2}(x^5-x^7)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

于是$\overline{x}=\dfrac{M_y}{M}=\dfrac{35}{48}$；$\overline{y}=\dfrac{M_x}{M}=\dfrac{35}{54}$，

所求质心为$\left(\dfrac{35}{48},\dfrac{35}{54}\right)$.

4．$\dfrac{11}{30}\pi a^5$

提示：选球心为坐标原点，对称轴取作 $z$ 轴，半球面与锥面方程分别为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$z=\sqrt{x^2+y^2}-a$.半球关于 $z$ 轴的转动惯量为

$$I_1=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^a\rho^4\sin^3\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=\frac{4}{15}\pi a^5$$

锥体关于 $z$ 轴的转动惯量为

$$I_2=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\mathrm{d}r\int_{r-a}^0 r^3\mathrm{d}z=\frac{1}{10}\pi a^5$$

所以该物体关于对称轴的转动惯量 $I=I_1+I_2=\dfrac{11}{30}\pi a^5$.

5．$F_z=2\pi\left(R-\sqrt{R^2+H^2}+H\right)K$，引力方向同 $z$ 轴正向

提示：设圆柱底半径为 $R$，高为 $H$，以中心轴为 $z$ 轴，底面为 $xOy$ 面建立空间直角坐标系，则所求引力为柱体对原点处单位质点的引力，设引力 $\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$，显然 $F_x=F_y=0$

$F_z=K\iiint_{\Omega}\dfrac{1}{r^2}\cdot\cos\theta\mathrm{d}v=K\iiint_{\Omega}\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{z}{r}\mathrm{d}v$，取中 $\Omega$ 是圆柱体，$r$ 是圆柱中任一点 $M(x,y,z)$ 处小体积元素 $\mathrm{d}v$ 到原点（单位质点）的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\theta$ 为 $\overline{OM}$ 和 $\vec{k}$ 的夹角，

于是

$$F_z=K\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{z}{r}\mathrm{d}v=K\iiint\limits_{\Omega}\frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\mathrm{d}v \text{（利用柱坐标计算）}$$

$$=K\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_0^H\frac{z\mathrm{d}z}{(\sqrt{r^2+z^2})^3}=2\pi K\int_0^R\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+H^2}}\right)r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left(R-\sqrt{R^2+H^2}+H\right)K$$

引力方向同 $z$ 轴正向（$R+H>\sqrt{R^2+H^2}$，$F_z>0$）.

## 10.3.7 考研真题

【例 1】（2010 年数一） 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 $\Omega$ 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$________.

解：$\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，

而
$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2},$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{2}{3}$.

【例 2】（2001 年数一） 设有一高度为 $h(t)$（$t$ 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z=h(t)-\frac{z(x^2+y^2)}{h(t)}$$

（设长度单位为 cm，时间单位为 h），已知体积减少的速率与侧面积成正比例（比例系数 0.9），问高度为 130（cm）的雪堆全部融化需多少时间?

解：记 $V$ 为雪堆体积，$S$ 为雪堆的侧面积，则（$D_1$：$x^2+y^2\leqslant\dfrac{1}{2}\left[h^2(t)-h(t)\cdot z\right]$）

$$V=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi\left[h^2(t)-h(t)\cdot z\right]\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h^3(t)$$

$$S=\iint\limits_{D_2}\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \left(D_2\text{：}x^2+y^2\leqslant\frac{h^2(t)}{2}\right)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\frac{1}{h(t)}\left[h^2(t)+16r^2\right]^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{12}h^2(t)$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-0.9S$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{13}{10}$，因此 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$

由 $h(0)=130$ 得 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$，令 $h(t)\to 0$，得 $t=100(\mathrm{h})$

因此，高度为 $130\mathrm{m}$ 的雪堆全部融化所需时间为 $100\mathrm{h}$.

评注：此题应注意曲面面积公式的应用.

**【例 3】（2000 年数一）** 设有一半径为 $R$ 的球体，$P_0$ 是此球体的表面上的一个定点，球体上任一点的密度与该点到 $P_0$ 的距离的平方成正比（比例常数 $k>0$），求球体的重心（质心）的位置.

**解**：记所考虑的球体为 $\Omega$，以 $\Omega$ 的球心为原点 $O$，射线 $OP_0$ 为正 $x$ 轴建立直角坐标系，则点 $P_0$ 的坐标为 $(R,0,0)$，球面的方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，设 $\Omega$ 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性得 $\bar{y}=0$，$\bar{z}=0$，$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}xk\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v}$，而

$$\iiint\limits_{\Omega}\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+\iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}v$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r+\frac{4}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}\pi R^5$$

$$\iiint\limits_{\Omega}x\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v=-2R\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}v=-\frac{2R}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v=-\frac{8}{15}\pi R^6$$

$\therefore\ \bar{x}=\dfrac{-\dfrac{8}{15}k\pi R^6}{\dfrac{32}{15}k\pi R^5}=-\dfrac{R}{4}$. 所以 $\Omega$ 的重心位置为 $\left(-\dfrac{R}{4},0,0\right)$.

评注：应熟练掌握空间物体质心公式.

**【例 4】（2013 年数一）** 设直线 $L$ 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 $L$ 绕 $z$ 轴旋转一周得到曲面 $\Sigma$，$\Sigma$ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 $\Omega$，

（1）求曲面 $\Sigma$ 的方程；

（2）求 $\Omega$ 的形心坐标.

**解**：（1）$\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$

$L:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$，$\forall M(x,y,z)\in\Sigma$，对应于 $L$ 上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

则 $x^2+y^2={x_0}^2+{y_0}^2$，

$\begin{cases} x_0 = 1 - z \\ y_0 = z \end{cases}$ 得 $\Sigma$： $x^2 + y^2 = 2z^2 - 2z + 1$

（2）显然 $\overline{x} = 0, \overline{y} = 0$

$$\overline{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v}$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v = \int_0^2 z\mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^2 (2z^3 - 2z^2 + z)\,\mathrm{d}z = \frac{14}{3}\pi$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = \int_0^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi \int_0^2 (2z^2 - 2z + 1)\,\mathrm{d}z = \frac{10}{3}\pi$$

所以 $\overline{z} = \dfrac{7}{5}$.

所以 $\Omega$ 的形心坐标为 $\left(0, 0, \dfrac{7}{5}\right)$.

**评注**：注意旋转曲面方程的求法；在三重积分的计算中，巧妙运用截面法使计算简化.

## 10.3.8　总习题十选讲

2．计算下列二重积分：

（3）$\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D$ 是圆周 $x^2+y^2 = Rx$ 所围成的闭区域.

（4）$\iint\limits_{D} (y^2 + 3x - 6y + 9)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x, y)|x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

**解**：（3）在极坐标下积分区域 $D$ 可表示为

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant R\cos\theta,$$

于是
$$\iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2}\,\rho\mathrm{d}\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}(R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{R\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin^3\theta|)\mathrm{d}\theta = \frac{2R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{9}(3\pi - 4)R^3.$$

（4）因为积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴、$y$ 轴对称，所以

$$\iint\limits_{D} 3x\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D} 6y\mathrm{d}\sigma = 0.$$

$$\iint\limits_{D} 9\mathrm{d}\sigma = 9\iint\limits_{D} \mathrm{d}\sigma = 9\pi R^2.$$

因为
$$\iint_D y^2 \mathrm{d}\sigma = \iint_D x^2 \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma,$$

所以
$$\iint_D (y^2+3x-6y+9)\mathrm{d}\sigma = 9\pi R^2 + \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$
$$=9\pi R^2 + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R \rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho = 9\pi R^2 + \frac{\pi}{4}R^4.$$

3．交换下列二次积分的次序:

（1）$\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\mathrm{d}x$;

（2）$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x$;

（3）$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$.

**解**:（1）积分区域为

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 4,\ -\sqrt{4-y}\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}(y-4)\right\},$$

并且 $D$ 又可表示为

$$D=\{(x,y)|-2\leqslant x\leqslant 0,\ 2x+4\leqslant y\leqslant -x^2+4\},$$

所以
$$\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_{-2}^0 \mathrm{d}x\int_{2x+4}^{-x^2+4} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

（2）积分区域为

$$D=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 2y\}\cup\{(x,y)|1\leqslant y\leqslant 3,\ 0\leqslant x\leqslant 3-y\},$$

并且 $D$ 又可表示为

$$D=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,\ \frac{1}{2}x\leqslant y\leqslant 3-x\right\},$$

所以
$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y\int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

（3）积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,\ \sqrt{x}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2}\},$$

并且 $D$ 又可表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant y^2\}\cup\{(x,y)\,|\,1\leqslant y\leqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant\sqrt{2y-y^2}\},$$

所以
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

5．把积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 $D=\{(x,y)|x^2\leqslant y\leqslant 1,\ -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

**解**：在极坐标下积分区域可表示为 $D=D_1+D_2+D_3$,

其中
$$D_1:\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,$$
$$D_2:\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4},\ 0\leqslant\rho\leqslant\csc\theta,$$
$$D_3:\ \frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant\tan\theta\sec\theta,$$

所以
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\csc\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$$
$$+\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\tan\theta\sec\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

8．计算下列三重积分：

（1）$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中Ω是两个球 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$的公共部分；

（2）$\iiint\limits_\Omega \dfrac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v$，其中Ω是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

（3）$\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\mathrm{d}v$，其中Ω是由 $xOy$ 面上曲线 $y^2=2x$ 绕 $x$ 轴旋转而成的曲面与平面 $x=5$ 所围成的闭区域.

**解**:（1）两球面的公共部分在 $xOy$ 面上的投影 $x^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2$，

在柱面坐标下积分区域可表示为
$$\Omega:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}R,\ R-\sqrt{R^2-\rho^2}\leqslant z\leqslant R\sqrt{R^2-\rho^2}\ ,$$

所以
$$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\mathrm{d}\rho\int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}z^2\rho\mathrm{d}z$$
$$=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R}\frac{1}{3}\left[(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-(R-\sqrt{R^2-\rho^2})^3\right]\rho\mathrm{d}\rho=\frac{59}{480}\pi R^5.$$

（2）因为积分区域Ω关于 $xOy$ 面对称，而被积函数为关于 $z$ 的奇函数,

所以
$$\iiint\limits_\Omega \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\mathrm{d}v=0.$$

（3）曲线 $y^2=2x$ 绕 $x$ 轴旋转而成的曲面的方程为 $y^2+z^2=2x$. 由曲面 $y^2+z^2=2x$ 和平面 $x=5$ 所围成的闭区域Ω在 $yOz$ 面上的投影区域为
$$D_{yz}:\ y^2+z^2\leqslant(\sqrt{10})^2,$$

在柱面坐标下此区域又可表示为
$$\Omega:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{10},\ \frac{1}{2}\rho^2\leqslant x\leqslant 5,$$

所以
$$\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{10}}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{1}{2}\rho^2}^{5}\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^{\sqrt{10}}\rho^3\left(5-\frac{1}{2}\rho^2\right)\mathrm{d}\rho=\frac{250}{3}\pi\,.$$

10．求平面$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$被三坐标面所割出的有限部分的面积.

**解**：平面的方程可写为$z=c-\frac{c}{a}x-\frac{c}{b}y$，所割部分在$xOy$面上的投影区域为
$$D=\left\{(x,y)\,|\,\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\right\},$$
于是
$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}ab\sqrt{1+\frac{c^2}{a^2}+\frac{c^2}{b^2}}\,.$$

11．在均匀的半径为 $R$ 的半圆形薄片的直径上，要接上一个一边与直径等长的同样材料的均匀矩形薄片，为了使整个均匀薄片的质心恰好落在圆心上，问接上去的均匀矩形薄片另一边的长度应是多少？

**解**：设所求矩形另一边的长度为$H$，建立坐标系，使半圆的直径在$x$轴上，圆心在原点. 不妨设密度为$\rho=1\mathrm{g/cm^3}$.

由对称性及已知条件可知$\bar{x}=\bar{y}=0$，即
$$\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,,$$
从而
$$\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-H}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\mathrm{d}y=0\,,$$
即
$$\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}[(R^3-x^2)-H^2]\mathrm{d}x=0\,,$$
亦即
$$R^3-\frac{1}{3}R^2-RH^2=0\,,$$
从而
$$H=\sqrt{\frac{2}{3}}R\,.$$
因此，接上去的均匀矩形薄片另一边的长度为$\sqrt{\frac{2}{3}}R$.

12．求由抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成的均匀薄片(面密度为常数$\mu$)对于直线$y=-1$的转动惯量.

**解**：抛物线$y=x^2$及直线$y=1$所围成区域可表示为
$$D=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\},$$
所求转动惯量为
$$I=\iint\limits_{D}\mu(y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mu\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}(y+1)^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\mu\int_{-1}^{1}[8-(x^2+1)^3]\mathrm{d}x=\frac{368}{105}\mu\,.$$

13．设在 $xOy$ 面上有一质量为 $M$ 的匀质半圆形薄片，占有平面闭域 $D=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant R^2, y\geqslant 0\}$，过圆心 $O$ 垂直于薄片的直线上有一质量为 $m$ 的质点 $P$，$OP=a$. 求半圆形薄片对质点 $P$ 的引力.

**解**：设 $P$ 点的坐标为$(0, 0, a)$. 薄片的面密度为 $\mu=\dfrac{M}{\frac{1}{2}\pi R^2}=\dfrac{2M}{\pi R^2}$.

设所求引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x, F_y, F_z)$.

由于薄片关于 $y$ 轴对称, 所以引力在 $x$ 轴上的分量 $F_x=0$, 而

$$F_y=G\iint_D\frac{m\mu y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=m\mu G\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2\sin\theta}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=m\mu G\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho=2m\mu G\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4GmM}{\pi R^2}\left(\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}-\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}}\right),$$

$$F_z=-G\iint_D\frac{m\mu a}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\sigma=-m\mu Ga\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=-\pi m\mu Ga\int_0^R\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\rho=-\frac{2GmM}{R^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right).$$

# 第 11 章　曲线积分与曲面积分

## 11.1　两类曲线积分的概念、性质及计算方法

### 11.1.1　基本要求

1．理解两类曲线积分的概念、性质及相互关系；
2．掌握计算两类曲线积分的方法；
3．会用曲线积分的本质意义求一些简单的几何量和物理量

### 11.1.2　基本内容

**1．第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）**

设 $L$ 为 $xOy$ 面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x, y)$在 $L$ 上有界. 在 $L$ 上任意插入一点列 $M_1$，$M_2$，· · ·，$M_{n-1}$ 把 $L$ 分在 $n$ 个小段. 设第 $i$ 个小段的长度为$\Delta s_i$，又$(\xi_i，\eta_i)$为第 $i$ 个小段上任意取定的一点，作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$，如果这和的极限存在，则称此极限为函数 $f(x, y)$在曲线弧 $L$ 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，即$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$.
其中$f(x,y)$叫做被积函数，$L$ 叫做积分弧段.

注：

（1）当$f(x, y)$在光滑曲线弧 $L$ 上连续时，则曲线积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$是存在的.

（2）平面曲线形构件的质量就是曲线积分$\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$ 的值，其中$\mu(x, y)$为线密度.

（3）对弧长的曲线积分在三维空间的情形：$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$.

（4）如果 $L$ 是闭曲线，则记作$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

**2．对弧长的曲线积分的性质**

（1）设 $c_1$、$c_2$ 为常数，则

$$\int_L [c_1 f(x,y)+c_2 g(x,y)]\mathrm{d}s=c_1\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+c_2\int_L g(x,y)\mathrm{d}s\ ;$$

（2）若积分弧段 $L$ 可分成两段光滑曲线弧 $L_1$ 和 $L_2$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s\,;$$

（3）设在 $L$ 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\leqslant\int_L g(x,y)\mathrm{d}s\,.$$

（4）
$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_L |f(x,y)|\,\mathrm{d}s$$

### 3．对弧长的曲线积分的计算法

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 $L$ 上有定义且连续，$L$ 的参数方程为

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t\ (\alpha<\beta).$$

注：

（1）若曲线 $L$ 由方程 $y=\psi(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\mathrm{d}x\ .(a<b)$$

（2）若曲线 $L$ 由方程 $x=\varphi(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\mathrm{d}y\qquad(c<d)\,.$$

（3）若曲线 $L$ 由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)\quad(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta\qquad(\alpha<\beta)$$

（4）若三维空间曲线 $\Gamma$ 的方程为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则：

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\mathrm{d}t\qquad(\alpha<\beta)\,.$$

### 4．第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

设函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 $xOy$ 平面内的有向光滑曲线 $L$ 上有界. 把 $L$ 分成 $n$ 个有向小弧段 $L_1,L_2,\cdots,L_n$；小弧段 $L_i$ 的起点为 $(x_{i-1},\ y_{i-1})$，终点为 $(x_i,\ y_i)$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$; $(\xi_i,\eta_i)$ 为 $L_i$ 上任意一点，$\lambda$ 为各小弧段长度的最大值. 如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$ 存在，则称此极限为 $P(x,y)$ 在有向曲线 $L$ 上对坐标 $x$ 的曲线积分，记作 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，如果极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$ 存在，则称此极限为函数 $Q(x,y)$ 在有向曲线 $L$ 上对坐标 $y$ 的曲线积分，记作 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$.

上述定义可以类似推广到积分弧段为空间有向曲线弧的情形.

注：

（1）$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y;$$

（2）$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+\int_\Gamma Q(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

**5．对坐标的曲线积分的性质**

（1）如果把 $L$ 分成两段 $L_1$ 和 $L_2$，则

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y.$$

（2）设 $L$ 是有向曲线弧，$-L$ 是与 $L$ 方向相反的有向曲线弧，则

$$\int_{-L} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

**6．对坐标的曲线积分的计算法**

设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$是定义在光滑有向曲线 $L$：$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ （$\varphi(t),\psi(t)$ 有一阶连续导数）上的连续函数，当参数 $t$ 单调地由 $\alpha$ 变到 $\beta$ 时，点 $M(x,y)$从 $L$ 的起点 $A$ 沿 $L$ 运动到终点 $B$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$$

注：（1）下限 $a$ 对应于 $L$ 的起点，上限 $\beta$ 对应于 $L$ 的终点，$\alpha$ 不一定小于 $\beta$.

（2）推广到空间：若空间光滑有向曲线 $\Gamma$ 由参数方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，$z=\omega(t)$给出（$\varphi(t),\psi(t),\omega(t)$ 有一阶连续导数），则类似有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha$ 对应于 $\Gamma$ 的起点，$\beta$ 对应于 $\Gamma$ 的终点.

**7．两类曲线积分之间的联系**

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L (P\cos\alpha+Q\sin\beta)\mathrm{d}s=\int_L (P,Q)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)\mathrm{d}s=\int_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{F}=(P,Q)$，$\boldsymbol{T}=(\cos\alpha,\cos\beta)$为有向曲线弧 $L$ 上点$(x,y)$处单位切向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$.

类似地有

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$
$$=\int_\Gamma (P,Q,R)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}s=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

其中 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R)$，$\boldsymbol{T}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$为有向曲线弧 $\Gamma$ 上点$(x,y,z)$处的单位切向量，$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$.

## 11.1.3 典型例题

【例 1】 计算$\oint_L(\sin x+y^3)\mathrm{d}s$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=R^2$

解：因为$\sin x$是关于$x$的奇函数，积分曲线$L$关于$y$轴对称，所以$\oint_L \sin x\mathrm{d}s=0$

同理，$y^3$是关于$y$的奇函数，积分曲线$L$关于$x$轴对称，所以$\oint_L y^3\mathrm{d}s=0$

所以积分的值为 0.

评注：当积分曲线是对称曲线时，应先观察被积函数是否也有对称性及反对称性.

【例 2】 计算$\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中$L$是圆周$x^2+y^2=ax$

解法 1：$L$的参数方程$\begin{cases}x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos t\\ y=\dfrac{a}{2}\sin t\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，所以$\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\cos t}$，

$$\mathrm{d}s=\frac{a}{2}\mathrm{d}t,\ \text{原式}=\frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos t}\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{t}{2}\right|\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{\pi}|\cos u|\mathrm{d}u=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\mathrm{d}u=2a^2$$

解法 2：$L$的极坐标方程$r=a\cos\theta,\theta\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$\sqrt{x^2+y^2}=r$

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta,\text{所以 原式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos\theta\mathrm{d}\theta=2a^2$$

评注：当$L$为椭圆曲线（圆是其特例）时，用极坐标方程或参数方程计算一般较易，要注意偏心圆的参数方程和积分中出现的绝对值符号以及下限小于上限.

【例 3】 计算$\int_\Gamma y^2\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+z=a,\end{cases}$ $(a>0)$.

解：$\Gamma$在$xOy$平面的投影曲线：$x^2+y^2+(a-x)^2=a^2$，即$2x^2+y^2-2ax=0$，$z=0$化为椭圆的标准方程$2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{2}a^2$

利用椭圆的参数方程得$\Gamma$的参数方程为

$$\Gamma:\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}a\cos\theta,\\ y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.\\ z=a-x=\dfrac{1}{2}a-\dfrac{1}{2}a\cos\theta,\end{cases}$$

由$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\mathrm{d}\theta=\sqrt{\dfrac{1}{4}a^2\sin^2\theta+\dfrac{1}{2}a^2\cos^2\theta+\dfrac{1}{4}a^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\mathrm{d}\theta$.

所以

$$\int_{\Gamma} y^2 \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 \sin^2\theta \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \mathrm{d}\theta = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{a^3\pi}{2\sqrt{2}}.$$

**评注**：根据空间曲线$\Gamma$的特性，先将其投影到坐标平面求出投影曲线的参数方程，进而得到$\Gamma$的参数方程是化为定积分的常用解题方法.

**【例 4】** 计算$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y$，$L: y = 1-|1-x|$从对应于$x=0$时的点到$x=2$时的点的一段弧.

**解**：$L_1$的方程　$y = x\ (0 \leqslant x \leqslant 1)$，有

$$\int_{L_1} (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 2x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.$$

$L_2$的方程$y = 2-x\ (1 \leqslant x \leqslant 2)$，则

$$\begin{aligned}
&\int_{L_2} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2 [x^2+(2-x)^2]\mathrm{d}x + \int_1^2 [x^2-(2-x)^2]\cdot(-1)\mathrm{d}x \\
&= \int_1^2 2(2-x)^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

所以

$$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x + (x^2-y^2)\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

**评注**：对于含绝对值的积分曲线，第一步是将曲线分段表示以去绝对值符号，第二步是将有向曲线向两个坐标轴分别投影（也可向一个坐标轴投影））得到定积分的对应上下限（不一定下限小于上限，此与第一类曲线积分不同），本题是向$x$轴投影，此时$y = y(x)$，$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x$，当然向$y$轴投影亦可（此时$x = x(y), \mathrm{d}x = x'\mathrm{d}y$）.

**【例 5】** $I = \oint_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，$L$为椭圆周$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，且从$z$轴正方向看去，$L$取顺时针方向.

**解**：$L$的参数方程为$x = \cos t$，$y = \sin t$，$z = 2-\cos t+\sin t$，$t$从$2\pi$变到$0$，

$$\begin{aligned}
I &= \oint_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= \int_{2\pi}^0 (3\cos^2 t - \sin^2 t - 2\sin t - 2\cos t)\mathrm{d}t = -2\pi
\end{aligned}$$

**评注**：将空间曲线化为参数方程是化为定积分的计算的关键一步，同时注意$t$从$2\pi$变到$0$.

**【例 6】** 一个质点在力$\boldsymbol{F}$的作用下从点$A(a,\ 0)$沿椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$按逆时针方向移动到点$B(0, b)$，$\boldsymbol{F}$的大小与质点到原点的距离成正比，方向恒指向原点. 求力$F$所作的功$W$.

**解**：因为椭圆的参数方程为$x = a\cos t$，$y = b\sin t$，$t$从 0 变到$\frac{\pi}{2}$.

设向径$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$，由已知　$\boldsymbol{F} = k\cdot|\boldsymbol{r}|\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = -k(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$，$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$

$$W=\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\widehat{AB}}-kx\mathrm{d}x-ky\mathrm{d}y=-k\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-a^2\cos t\sin t+b^2\sin t\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=k(a^2-b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=\frac{k}{2}(a^2-b^2).$$

**评注**：第二类曲线积分的物理意义是变力沿曲线作功，本题是个典型的例子，由于力的方向恒指向原点，与向径方向相反，所以取负号.

**【例 7】** 把第二类曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一类曲线积分，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限的部分，取逆时针方向.

**解**：$L$ 的参数方程为 $x=\cos\theta$， $y=\sin\theta$， $\theta$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，

$L$ 在点 $(x,y)$ 的切向量为 $\boldsymbol{t}=\pm(x'(\theta),y'(\theta))=(-\sin\theta,\cos\theta)=(-y,x)$，单位切向量为

$$\cos\alpha=\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}=-y,\quad \cos\beta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=x.$$

由两类曲线积分的关系

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L (P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta)\mathrm{d}s=\int_L(-yP(x,y)+xQ(x,y))\mathrm{d}s.$$

**评注**：解题的关键是求出与曲线弧 $L$ 方向一致的单位切向量 $(\cos\alpha,\cos\beta)$，由于 $L$ 在 $xOy$ 坐标面取逆时针方向且位于第一象限，所以切向量的第一坐标应取负号. 空间曲线的单位切向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 同样应注意这个问题,有关切向量的求法请参阅同济 6 版高数下册 P94-96.

## 11.1.4　释疑解难

1．对弧长的曲线积分与对坐标的曲线积分在化为定积分时定积分限有何注意点?

答：由于对弧长曲线积分和式中的 $\Delta s_i$ 非负，所以化为定积分时上限必须大于下限，而对坐标的曲线积分，其积分和式中的 $\Delta x_i$ 、$\Delta y_i$ 和 $\Delta z_i$ 分别表示有向小曲线段在 $X$ 轴，$Y$ 轴和 $Z$ 轴上的投影，其值可能正可能负，它与积分路径的方向有关，化为定积分时必须下限对应积分路径的起点，上限对应积分路径的终点，因此上限未必大于下限.

2．利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性计算积分，应注意什么?

答：积分区域无向的积分（如第一类曲线（曲面）积分，二重，三重积分）都可以利用积分区域的对称性和被积函数的奇偶性来简化计算. 以二重积分 $I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 为例：

（1）若积分区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，那么

当 $f(x,y)$ 关于 $x$ 是奇函数( $f(-x,y)=-f(x,y)$ )时，$I=0$；

当 $f(x, y)$ 关于 $x$ 是偶函数( $f(-x,y)=f(x,y)$ )时，$I=2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)|(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$.

（2）若积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，那么

当 $f(x,y)$ 关于 $y$ 是奇函数( $f(x,-y)=-f(x,y)$ )时，$I=0$；

当 $f(x, y)$ 关于 $y$ 是偶函数( $f(x,-y)=f(x,y)$ )时，$I=2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，其中

$D_1=\{(x,y)\big|(x,y)\in D, y\geqslant 0\}$.

三重积分也类似分析.

3．下面的解法错在哪里？

计算 $\int_L |y|\mathrm{d}s$，其中 $L$ 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 上从点 A(0，a)顺时针到 $\mathrm{B}\left(\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的圆弧.

**解**：$L$ 的方程为 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，则

$$\int_L |y|\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

答：这种解法是错误的.错在当点沿圆弧从 A 到 B 时，圆弧的方程开始是 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，后来是 $y=-\sqrt{a^2-x^2}$，应分段积分.正确的解法是：

$$\int_L |y|\mathrm{d}s=\int_{\overset{\frown}{AC}}|y|\mathrm{d}s+\int_{\overset{\frown}{CB}}|y|\mathrm{d}s=\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x-\int_a^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\sqrt{a^2-x^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=2a^2-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$$

4．对空间曲线的第二类曲线积分，常用哪些计算方法？

答：常用的有三种方法：

一是将空间曲线化为参数方程，然后化为定积分计算，按路径的方向定积分限，这是最常用的方法；

二是将空间曲线向某坐标面投影将积分化为平面曲线积分. 现以计算 $\int_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 为例，设 $\Gamma$ 由方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 给出，它在 $xOy$ 平面上的投影柱面为 C：$f(x,y)=0$（从方程组中消去 $z$ 而得），并且 $R(x,y,z)$在 $\Gamma$ 上的点$(x,y,z)$处的值，就等于 $R[x,y,f(x,y)]$在 C 上点$(x,y)$处的值. 再对 $\Gamma$ 的方程两边求微分得方程组

$$\begin{cases}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z=0\\G_x\mathrm{d}x+G_y\mathrm{d}y+G_z\mathrm{d}z=0\end{cases}$$

解出 $\mathrm{d}z$，于是便可将 $R(x,y,z)$在 $\Gamma$ 上的曲线积分 $\int_\Gamma R(x,y,z)\mathrm{d}z$ 化为 $R[x,y,f(x,y)]$在平面曲线 C 上的曲线积分；

三是利用斯托克斯公式（后面介绍）计算.

## 11.1.5　部分习题解答

【习题 11-1】

3．计算下列对弧长的曲线积分:

（1）$\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x=a\cos t$ ，$y=a\sin t$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

（2）$\int_L (x+y)\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为连接(1, 0)及(0, 1)两点的直线段;

（3）$\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界;

（4）$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 $x$ 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;

（5）$\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中Γ为曲线 $x=\mathrm{e}^t\cos t$，$y=e^t\sin t$，$z=\mathrm{e}^t$ 上相应于 $t$ 从 0 变到 2 的这段弧;

（6）$\int_\Gamma x^2yz\mathrm{d}s$，其中Γ为折线 $ABCD$，这里 $A$、$B$、$C$、$D$ 依次为点(0, 0, 0)、(0, 0, 2)、(1, 0, 2)、(1, 3, 2);

（7）$\int_L y^2\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$;

（8）$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$.

**解**：（1）

$$\begin{aligned}\oint_L (x^2+y^2)^n\mathrm{d}s&=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\mathrm{d}t=2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

（2）$L$ 的方程为 $y=1-x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$;

$$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_0^1(x+1-x)\sqrt{1+[(1-x)']^2}\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1-x)\sqrt{2}dx=\sqrt{2}.$$

（3）$L_1$: $y=x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$, $L_2$: $y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$.

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{d}s&=\int_{L_1}x\mathrm{d}s+\int_{L_2}x\mathrm{d}s\\&=\int_0^1 x\sqrt{1+[(x^2)']^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{1+(x')^2}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{2}x\mathrm{d}x=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

（4）$L=L_1+L_2+L_3$，其中

$$L_1: x=x,\ y=0(0\leqslant x\leqslant a),$$

$$L_2: x=a\cos t,\ y=a\sin t\ \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{4}\right),$$

$$L_3: x=x,\ y=x\ \left(0\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

因而

$$\begin{aligned}\oint_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s&=\int_{L_1}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_2}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s+\int_{L_3}\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s,\\&=\int_0^a\mathrm{e}^x\sqrt{1^2+0^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\mathrm{d}t+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a}\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{1^2+1^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$=e^{a}\left(2+\frac{\pi}{4}a\right)-2.$$

（5） $$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

$$=\sqrt{(e^t\cos t-e^t\sin t)^2+(e^t\sin t+e^t\cos t)^2+e^{2t}}dt=\sqrt{3}e^t dt,$$

$$\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}ds=\int_0^2\frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\sqrt{3}e^t dt$$

$$=\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}dt=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\right]_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).$$

（6）$\Gamma=AB+BC+CD$，其中

$$AB: x=0, y=0, z=t\ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

$$BC: x=t, y=0, z=2(0\leqslant t\leqslant 3),$$

$$CD: x=1, y=t, z=2(0\leqslant t\leqslant 3),$$

故 $$\int_\Gamma x^2yz ds=\int_{AB}x^2yz ds+\int_{BC}x^2yz ds+\int_{CD}x^2yz ds$$

$$=\int_0^1 0dt+\int_0^3 0dt+\int_0^3 2t\sqrt{0^2+1^2+0^2}dt=9.$$

（7） $$\int_L y^2 ds=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\sqrt{[a(t-\sin t)']^2+[a(\cos t)']^2}dt$$

$$=\sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\sqrt{1-\cos t}dt=\frac{256}{15}a^3.$$

（8） $$ds=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{(at\cos t)^2+(at\sin t)^2}dt=at dt$$

$$\int_L(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}[a^2(\cos t+t\sin t)^2+a^2(\sin t-t\cos t)^2]at dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^3(1+t^2)t dt=2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

5．设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求:

（1）它关于 $z$ 轴的转动惯量 $I_z$; (2)它的质心.

**解：** $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt=\sqrt{a^2+k^2}dt$.

（1） $$I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)ds=\int_L(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt=\frac{2}{3}\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

（2） $$M=\int_L\rho(x,y,z)ds=\int_L(x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2),$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_L x(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\int_L y(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{-6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\int_L z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2},$$

故质心坐标为$\left(\dfrac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\ -\dfrac{6\pi ak^2}{3a^2+4\pi^2k^2},\ \dfrac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4\pi^2k^2}\right)$.

【习题 11-2】

3．计算下列对坐标的曲线积分：

（2）$\oint_L xy\mathrm{d}x$，其中 $L$ 为圆周$(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$及 $x$ 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界(按逆时针方向绕行);

（5）$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 为曲线 $x=k\theta,\ y=a\cos\theta,\ z=a\sin\theta$ 上对应 $\theta$ 从 0 到 $\pi$ 的一段弧;

（7）$\oint_\Gamma \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 $A, B, C$ 依次为点(1, 0, 0)，(0, 1, 0)，(0, 0, 1);

解：（2）$L=L_1+L_2$，其中

$L_1$：$x=a+a\cos t$，$y=a\sin t$，$t$ 从 0 变到 $\pi$,

$L_2$：$x=x, y=0$，$x$ 从 0 变到 $2a$,

因此
$$\oint_L xy\mathrm{d}x=\int_{L_1}xy\mathrm{d}x+\int_{L_2}xy\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}a(1+\cos t)a\sin t(a+a\cos t)'\mathrm{d}t+\int_0^{2a}0\mathrm{d}x$$

$$=-a^3\left(\int_0^{\pi}\sin^2t\mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\sin^2t\mathrm{d}\sin t\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

（5）
$$\int_\Gamma x^2\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y-y\mathrm{d}z=\int_0^{\pi}[(k\theta)^2k+a\sin\theta(-a\sin\theta)-a\cos\theta a\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\pi}(k^3\theta^2-a^2)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\pi^3k^3-\pi a^2.$$

（7）$\Gamma=AB+BC+CA$，其中

$AB$：$x=x, y=1-x$，$z=0$，$x$ 从 1 变到 0，

$BC$：$x=0, y=1-z$，$z=z$，$z$ 从 0 变到 1，

$CA$：$x=x, y=0$，$z=1-x$，$x$ 从 0 变到 1，

故
$$\oint_L \mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z=\int_{AB}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{BC}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z+\int_{CA}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^1[1-(1-x)']\mathrm{d}x+\int_0^1[-(1-z)'+(1-z)]\mathrm{d}t+\int_0^1\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

4．计算 $\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是:

（1）抛物线 $y^2=x$ 上从点(1, 1)到点(4, 2)的一段弧;

（2）从点(1, 1)到点(4, 2)的直线段;

（3）先沿直线从点(1, 1)到(1, 2)，然后再沿直线到点(4, 2)的折线;

（4）曲线 $x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$ 上从点(1, 1)到(4, 2)的一段弧.

**解**：（1）$L$：$x=y^2$，$y=y$，$y$ 从 1 变到 2，故
$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2[(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]\mathrm{d}y=\frac{34}{3}.$$

（2）$L$：$x=3y-2$，$y=y$，$y$ 从 1 变到 2，故
$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2[(3y-2+y)\cdot 3+(y-3y+2)\cdot 1]\mathrm{d}y=11$$

（3）$L=L_1+L_2$，其中

$L_1$：$x=1$，$y=y$，$y$ 从 1 变到 2，

$L_2$：$x=x, y=2$，$x$ 从 1 变到 4,

故
$$\int_L (x+y)dx+(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y+\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^2(y-1)\mathrm{d}y+\int_1^4(x+2)\mathrm{d}x=14.$$

（4）$L$：$x=2t^2+t+1$，$y=t^2+1$，$t$ 从 0 变到 1，故
$$\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_0^1[(3t^2+t+2)(4t+1)+(-t^2-t)\cdot 2t]\mathrm{d}t=\frac{32}{3}$$

5．一力场由沿横轴正方向的恒力 $\boldsymbol{F}$ 所构成，试求当一质量为 $m$ 的质点沿圆周 $x^2+y^2=R^2$ 按逆时针方向移过位于第一象限的那一段弧时场力所作的功.

**解**：已知场力为 $\boldsymbol{F}=(|\boldsymbol{F}|, 0)$，曲线 $L$ 的参数方程为
$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,$$
$\theta$ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$，于是场力所作的功为

$$W=\int_L \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_L |F|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|F|\cdot(-R\sin\theta)d\theta=-|F|R\,.$$

6．设 $z$ 轴与重力的方向一致，求质量为 $m$ 的质点从位置$(x_1, y_1, z_1)$沿直线移到$(x_2, y_2, z_2)$时重力所作的功.

**解：** 已知 $\boldsymbol{F}=(0, 0, mg)$. 设 $\Gamma$ 为从$(x_1, y_1, z_1)$到$(x_2, y_2, z_2)$的直线，则重力所作的功为

$$W=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_\Gamma 0dx+0dy+mgdz=mg\int_{z_1}^{z_2}dz=mg(z_2-z_1)\,.$$

7．把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 化成对弧长的曲线积分，其中 $L$ 为：

（1）在 $xOy$ 面内沿直线从点(0, 0)到(1, 1);

（2）沿抛物线 $y=x^2$ 从点(0, 0)到(1, 1);

（3）沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点(0, 0)到(1, 1).

**解：**（1）$L$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，

故
$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy&=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\\&=\int_L \frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}ds.\end{aligned}$$

（2）曲线 $L$ 上点$(x, y)$处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1, 2x)$，单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\right),$$

故
$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy&=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\\&=\int_L \frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}ds.\end{aligned}$$

（3）$L$ 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$，其上任一点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=\left(1,\ \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right),$$

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta)=\boldsymbol{e}_\tau=(\sqrt{2x-x^2},\ 1-x),$$

故
$$\begin{aligned}\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy&=\int_L [P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\\&=\int_L[\sqrt{2x-x^2}P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]ds.\end{aligned}$$

8．设 $\Gamma$ 为曲线 $x=t$ ，$y=t^2$，$z=t^3$ 上相应于 $t$ 从 0 变到 1 的曲线弧，把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$ 化成对弧长的曲线积分.

**解：** 曲线 $\Gamma$ 上任一点的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(1,2t,3t^2)=(1,2x,3y),$$

单位切向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\boldsymbol{e}_\tau=\frac{1}{\sqrt{1+2x^2+9y^2}}(1,\ 2x,\ 3y),$$

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\Gamma[P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma]\mathrm{d}s$$

$$=\int_L\frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\mathrm{d}s.$$

## 11.1.6　练习题

1. $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=1$，直线 $y=x$ 及 $x$ 轴在第一象限所围图形的边界.

2. 求 $\int_\Gamma z\mathrm{d}s$，其中 $\Gamma$ 为曲线 $\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\\ z=t\end{cases}$，$(0\leqslant t\leqslant t_0)$.

3. $L$ 为上半椭圆圆周 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ 取顺时针方向，求 $\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$.

4. $\int_L y^2\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=R^2$ 的上半部分，$L$ 的方向为逆时针.

5. 计算 $I=\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是从点 A(3, 2, 1)到点 B(0, 0,0)的直线段 AB.

6. $\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界，当从球面外看时为顺时针.

7. 把第二类曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 化为第一类曲线积分，其中 $L$ 为：沿抛物线 $y=x^2$ 从点（0, 0）到点（1, 1）.

## 练习题答案

1. $2(\mathrm{e}-1)+\frac{\pi}{4}\mathrm{e}$　　2. $\dfrac{(2+t_0^2)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}}{3}$　　3. $\pi ab$

4. $-\frac{4}{3}R^3$　　5. $-\frac{87}{4}$　　6. 4　　7. $\int_L\dfrac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\mathrm{d}s$

## 11.1.7　考研真题

【例 1】（2003 年数一）　已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 $D$ 的正向边界. 试证：

（1）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\mathrm{d}x$.

（2）$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$.

**解**：（1）左边 $= \int_0^{\pi} \pi e^{\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x$,

右边 $= \int_0^{\pi} \pi e^{-\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi e^{\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x$,

所以
$$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y - ye^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

（2）由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\geqslant 2$，故由（1）得
$$\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y - ye^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2.$$

**【例 2】**（2004 年数一） 设 $L$ 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}x$ 的值为________.

**解**：正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分可表示为
$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta \end{cases},\qquad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

于是 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sqrt{2}\cos\theta\cdot\sqrt{2}\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cdot\sqrt{2}\sin\theta]\mathrm{d}\theta=\pi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{3\pi}{2}$.

**【例 3】**（2007 年数一） 设曲线 $L: f(x,y)=1$，（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数），过第 II 象限内的点 $M$ 和第Ⅳ象限内的点 $N$,$\Gamma$ 为 $L$ 上从点 $M$ 到 $N$ 的一段弧，则下列小于零的是(　　)

A. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$　　D. $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

**解**：不妨设 $M$、$N$ 点的坐标为 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1>y_2$. 将曲线方程代入积分表达式，计算得：

$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x=\int_\Gamma \mathrm{d}x=x_2-x_1>0$；　$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma \mathrm{d}y=y_2-y_1<0$；

$\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\Gamma \mathrm{d}s=s>0$；　$\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma \mathrm{d}f(x,y)=0$.

故正确选项为（B）.

**【例 4】**（2009 年数一） 已知曲线 $L: y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_\Gamma x\mathrm{d}s=$________.

**解**：由题意可知，$x=x,y=x^2,0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，则
$$\mathrm{d}s=\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}x=\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x,$$

所以
$$\int_L x\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\mathrm{d}(1+4x^2)=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1+4x^2)^3}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}$$

**【例 5】（2010 年数一）** 已知曲线 $L$ 的方程为 $y=1-|x|, x\in[-1,1]$, 起点是 $(-1,0)$, 终点是 $(1,0)$, 计算曲线积分 $\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$ .

**解：** 令　$L_1:\begin{cases}x=t\\y=1+t\end{cases}$, $t$ 从$-1$ 变到 0；　$L_2:\begin{cases}x=t\\y=1-t\end{cases}$, $t$ 从 0 变到 1.

$$\int_L xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y=\int_{L_1}+\int_{L_2}=\int_{-1}^0 t(1+t)+t^2\mathrm{d}t+\int_0^1 t(1-t)-t^2\mathrm{d}t$$

$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^0+\left[\frac{t^2}{2}-\frac{2}{3}t^3\right]_0^1=0$$

**【例 6】（2011 年数一）** 设 $L$ 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$________.

**解：** 曲线 $L$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos t\\y=\sin t\\z=\cos t+\sin t\end{cases}$，其中 $t$ 从 0 变到 $2\pi$．因此

$$\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos t(\cos t+\sin t)(-\sin t)+\cos t\cos t+\frac{\sin^2 t}{2}(\cos t-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}-\sin t\cos^2 t-\frac{\sin^2 t\cos t}{2}+\cos^2 t-\frac{\sin^3 t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\pi$$

# 11.2　两类曲面积分的概念、性质及计算方法

## 11.2.1　基本要求

1．理解两类曲面积分的概念、性质及相互关系；

2．掌握计算两类曲面积分的方法；

3．会用曲面积分的本质意义求一些简单的几何量和物理量

## 11.2.2　基本内容

**1．第一类曲面积分（对面积的曲面积分）**

设曲面 $\Sigma$ 是光滑的，函数 $f(x,y,z)$在 $\Sigma$ 上有界. 把 $\Sigma$ 任意分成 $n$ 小块：$\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$（$\Delta S_i$ 也代表曲面的面积），在$\Delta S_i$ 上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，如果当各小块曲面的直径的最大值$\lambda\to 0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在，则称此极限为函数 $f(x,y,z)$在曲面$\Sigma$上对面积的曲面积分或第一类曲面积分，记作

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i .$$

其中 $f(x, y, z)$称为被积函数，$\Sigma$ 称为积分曲面.

当 $f(x, y, z)$在光滑曲面 $\Sigma$ 上连续时对面积的曲面积分是存在的.

根据上述定义面密度为连续函数 $\rho(x, y, z)$的光滑曲面 $\Sigma$ 的质量 $M$ 可表示为

$$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$$

### 2．对面积的曲面积分的性质

（1）设 $c_1$、$c_2$ 为常数，则

$$\iint\limits_{\Sigma}[c_1 f(x,y,z)+c_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}S=c_1\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S+c_2\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S;$$

（2）若曲面$\Sigma$可分成两片光滑曲面 $\Sigma_1$ 及 $\Sigma_2$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S;$$

（3）设在光滑曲面$\Sigma$上 $f(x, y, z)\leqslant g(x, y, z)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S\leqslant\iint\limits_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S;$$

（4）$\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=A$，其中 $A$ 为曲面$\Sigma$的面积.

### 3．对面积的曲面积分的计算法

如果光滑曲面 $\Sigma$ 由方程 $z = z(x, y)$给出，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D_{xy}$，函数 $z = z(x, y)$ 在 $D_{xy}$ 上具有一阶连续偏导数，被积函数 $f(x, y, z)$在 $\Sigma$ 上连续，则曲面的面积元素为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，对面积的曲面积分可以化为二重积分来计算：

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似地有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{zx}} f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z^2(z,x)+y_x^2(z,x)}\mathrm{d}z\mathrm{d}x .$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

### 4．第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

设 $\Sigma$ 为光滑的有向曲面，函数 $R(x,y,z)$在$\Sigma$上有界，把 $\Sigma$ 任意分成 $n$ 块小曲面 $\Delta S_i$，$\Delta S_i$ 在 $xOy$ 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，如果 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$（其中 $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$ 是 $\Delta S_i$ 上任意取定的一点，$\lambda$ 为各小块曲面的直径的最大值.）存在，则称此极限为 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 $\Sigma$ 上对坐

标 $x, y$ 的曲面积分（第二类曲面积分），记作 $\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，类似地可以定义

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad 和 \quad \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

其中 $P$、$Q$、$R$ 称为被积函数，$\Sigma$ 称为积分曲面.

5．对坐标的曲面积分的性质

（1）如果把 $\Sigma$ 分成 $\Sigma_1$ 和 $\Sigma_2$，则

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .\end{aligned}$$

（2）设 $\Sigma$ 是有向曲面，$\Sigma^-$ 表示与 $\Sigma$ 取相反侧的有向曲面，则

$$\iint\limits_{\Sigma^-} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

6．对坐标的曲面积分的计算法

设曲面 $\Sigma$ 由方程 $z = z(x, y)$给出，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影区域为 $D_{xy}$，$z = z(x, y)$在 $D_{xy}$ 上具有一阶连续偏导数，$R(x, y, z)$在 $\Sigma$ 上连续，则对坐标的曲面积分可以化为二重积分来计算：

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma \mathrm{d}S = \pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中正、负号分别对应 $\Sigma$ 取上、下侧情形.

类似地，如果 $\Sigma$ 由 $x = x(y,z)$给出，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha \mathrm{d}S = \pm\iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

其中正、负号分别对应 $\Sigma$ 取前、后侧情形.

如果 $\Sigma$ 由 $y = y(z，x)$给出，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta \mathrm{d}S = \pm\iint\limits_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x .$$

其中正、负号分别对应 $\Sigma$ 取右、左侧情形.

注：上式也表示了两类曲面积分之间的联系：

$$\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

## 11.2.3　典型例题

【例 1】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{3y}{2}+\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限的部分.

**解**：将曲面的方程改写为 $\Sigma: z=4\left(1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{4}{3}$，从而

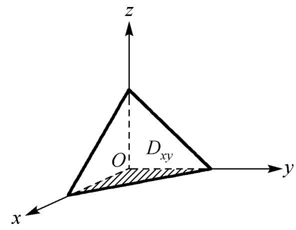


图 11-1-1

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$\Sigma$ 在 $xOy$ 上的投影区域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 3-\dfrac{3}{2}x\right\}$，故

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{\Sigma}\left(x+\frac{3y}{2}+\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{D_{xy}}\left[x+\frac{3}{2}y+2\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)\right]\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{\sqrt{61}}{3}\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{3-\frac{3}{2}x}\left(2-\frac{5}{6}y\right)\mathrm{d}y=\frac{7\sqrt{61}}{6}.\end{aligned}$$

**评注**：计算第一类曲面积分一般分三步：1 投——将 $\Sigma$ 向某个坐标面投影得投影区域（例如：若 $\Sigma: z=z(x,y)$ 在 $xOy$ 坐标面的投影区域 $D_{xy}$ 上有一阶连续偏导数，被积函数在 $\Sigma$ 上连续，则将 $\Sigma$ 向 $xOy$ 面投影是有意义的，注意被积函数中的 $z$ 应换为 $z(x,y)$）；2 面——计算曲面面积元素 $\mathrm{d}S$（例如 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$）；3 二重——将原积分化为投影区域上的二重积分. 本题也可以向另外两个坐标面投影.

**【例 2】** 计算 $\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 $S$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分；

**解**：被截得的曲面在 $xOy$ 面上的投影区域 $D_{xy}$ 是圆心在点 $(a,0)$ 直径为 $2a$ 的圆域，即 $D_{xy}: 0\leqslant\rho\leqslant 2a\cos\theta, -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，由曲面 $S$ 的方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{2}$，于是

$$\begin{aligned}\iint\limits_{S}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{D_{xy}}\left[xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2}\right]\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\left[\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho^2\cos\theta+\rho^2\sin\theta\right]\rho\mathrm{d}\rho\\&=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4.\end{aligned}$$

**评注**：注意本题的曲面是上半锥面方程，投影区域是 $D_{xy}$，另外用到对称区间上的定积分被积函数的奇偶性：$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+1)\cos^4\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=0$.

【例 3】 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 $\Sigma$ 为介于 $z=0$ 与 $z=H(H>0)$ 之间的柱面：$x^2+y^2=R^2$.

**解**：利用对称性有 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=4\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

其中 $\Sigma_1$ 为 $\Sigma$ 在第一卦限部分，$\Sigma_1: x=\sqrt{R^2-y^2}, D: 0\leqslant y\leqslant R, 0\leqslant z\leqslant H$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\sqrt{1+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}&=4\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=4\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{R^2+z^2}}\\&=4\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\int_0^H\mathrm{d}z\int_0^R\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\\&=4\int_0^H\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\mathrm{d}z\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\\&=4\ln\left(z+\sqrt{R^2+z^2}\right)\Big|_0^H\left[R\arcsin\frac{y}{R}\right]_0^R\\&=2\pi R\ln\frac{H+\sqrt{R^2+H^2}}{R}\end{aligned}$$

**评注**：本题的曲面 $\Sigma$ 向 $xOy$ 坐标面投影是不行的（投影面积为 0），但可以向另外两个坐标面投影（分前后两片），本题利用 $\Sigma$ 的对称性和被积函数的对称性化为第一卦限的 $\Sigma_1$ 的积分的 4 倍是较好的解法.

【例 4】设 $\Sigma$ 为柱面 $x^2+z^2=a^2$ 在使得 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 的两个卦限内被平面 $y=0$ 及 $y=h$ 所截下部分的外侧，试计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

**解**：将 $\Sigma$ 分成 $\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$，其中 $\Sigma_1$：$z=\sqrt{a^2-x^2}$（取上侧），$\Sigma_2$：$z=-\sqrt{a^2-x^2}$（取下侧），$\Sigma_1$ 与 $\Sigma_2$ 在 $xoy$ 面上的投影区域均为 $D_{xy}: 0\leqslant x\leqslant a, 0\leqslant y\leqslant h$，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}xy\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_{xy}}xy(-\sqrt{a^2-x^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint\limits_{D_{xy}}xy\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^h x\sqrt{a^2-x^2}\cdot y\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{3}a^3h^2.\end{aligned}$$

**评注**：计算第二类曲面积分一般分三步：1 投——将 $\Sigma$ 向题目给定坐标面((或用投影面

转换法）投影得投影区域（例如：若$\Sigma: z=z(x,y)$在$xOy$坐标面的投影区域$D_{xy}$上有一阶连续偏导数，被积函数在$\Sigma$上连续，则将$\Sigma$向$xOy$面投影是有意义的，注意被积函数中的$z$应换为$z(x,y)$）；2 二重——将原积分化为投影区域上的二重积分；3 定号—根据$\Sigma$的侧在二重积分前面加正负号，原则是$\Sigma$为上侧，前侧，右侧时取正号；$\Sigma$为下侧，后侧，左侧时取负号，这是与第一类曲面积分的不同之处. 本题是一道典型例题.

【例 5】 已知稳定流速场$\boldsymbol{V}=(0,0,x+y+z)$，求单位时间内流过曲面$S: x^2+y^2=z$ $(0\leqslant z\leqslant h)$（取下侧）的流量.

**解**：所求的流量为

$$\begin{aligned}\varPhi&=\iint_S v\cdot n\mathrm{d}S=\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint_{D_{xy}}(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{1}{2}\pi h^2\end{aligned}$$

**评注**：第二类曲面积分的物理意义之一是计算稳定流速场中流向曲面一侧的流量$\varPhi$，计算公式为$\varPhi=\iint_\Sigma v\cdot n\mathrm{d}S=\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$，本题中$P=Q=0, R=x+y+z$, 注意曲面是取下侧，所以二重积分前加负号.

【例 6】 把第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化成第一类曲面积分，这里$\Sigma$为平面$3x+2y+2\sqrt{3}z=6$在第一卦限的部分的上侧.

**解**：平面$\Sigma$的上侧的法向量为$\boldsymbol{n}=(3,2,2\sqrt{3})$，其方向余弦是

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\cos\beta=\frac{2}{5},\cos\gamma=\frac{2}{5}\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_\Sigma[P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma]\mathrm{d}S\\&=\iint_\Sigma\left[\frac{3}{5}P(x,y,z)+\frac{2}{5}Q(x,y,z)+\frac{2\sqrt{3}}{5}R(x,y,z)\right]\mathrm{d}S\end{aligned}$$

**评注**：本题的要点是$\Sigma$的法向量指向是根据其侧而定，从而计算出正确的方向余弦，这是将第二类曲面积分化为第一类曲面积分的关键.

【例 7】计算 $\iint_\Sigma(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于$z=0,z=2$之间部分的下侧；

**解**：为简便计算，采用投影面转换法：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

曲面 $\Sigma$（下侧）的法向量 $\boldsymbol{n}=\{z_x,z_y,-1\}=\{x,y,-1\}$，所以 $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

代入原式：

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到 $D_{xy}$ 是对称的，所以 $\displaystyle\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\left(\rho^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho=8\pi$$

**评注**：本题采用了投影面转换法，原理来源于两类曲面积分之间的关系：$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$，将积分中的 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 表示为 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，这样 $\Sigma$ 只需向一个坐标面投影减少了许多计算量，注意点是 $\Sigma$ 的法向量的指向与 $\Sigma$ 的侧一致.

## 11.2.4　释疑解难

1. 当 $\Sigma$ 恰为 $xOy$ 面内的一个闭区域时，第一类曲面积分 $\displaystyle\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 与二重积分有何关系?

答：当 $\Sigma$ 为 $xOy$ 面内的一个闭区域 $D$ 时，$\Sigma$ 在 $xOy$ 面上的投影就是积分区域 $D$，于是有 $\mathrm{d}S=\mathrm{d}\sigma$，$\Sigma$ 上的点 $(x,y,z)$ 为点 $(x,y,0)$，

故
$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D}f(x,y,0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. 如何运用第一类曲面积分的计算公式?

答：第一类曲面积分 $I=\displaystyle\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的积分元素 $\mathrm{d}S$ 是曲面的面积元素，要将 $\Sigma$ 向哪个坐标面投影化为二重积分，要根据 $\Sigma$ 的方程式而定，具体是：

若 $\Sigma$：$z=z(x,y),\ (x,y)\in D$，其中 $D$ 是 $\Sigma$ 在 $xOy$ 平面上的投影区域，且 $z=z(x,y)$ 是 $D$ 上的单值函数，则

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D}f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y；$$

若 $\Sigma$：$y=y(z,x),\ (z,x)\in D$，其中 $D$ 是 $\Sigma$ 在 $zOx$ 平面上的投影区域，且 $y=y(z,x)$ 是 $D$ 上的单值函数，则

$$\iint_{\Sigma}f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D}f[x,y(z,x),z]\sqrt{1+y_z'^2+y_x'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x；$$

若 $\Sigma$：$x=x(y,z),\ (y,z)\in D$，其中 $D$ 是 $\Sigma$ 在 $yOz$ 平面上的投影区域，且 $x=x(y,z)$ 是 $D$ 上

的单值函数，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D} f[x(y,z),y,z)]\sqrt{1+x_y^2+x_z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

3．如何运用第二类曲面积分的计算公式?

答：第二类曲面积分的积分元素 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是曲面$\Sigma$（考虑侧）在坐标面 $yOz$ ，$zOx$ ，$xOy$ 平面的投影元素，曲面$\Sigma$在相应坐标面内投影区域的面积依侧的指定有一个正负号的确定，所以在化为二重积分时要加上正负号的考虑.

## 11.2.5　部分习题解答

【习题 11-4】

5．计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$ ，其中$\Sigma$是:

（1）锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

**解**：将$\Sigma$分解为$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1: z=1,\ D_1: x^2+y^2\leqslant 1,\ \mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

$$\Sigma_2: z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,D_2: x^2+y^2\leqslant 1,\ \ \mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

（注：$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ）

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S&=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\sqrt{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi.\end{aligned}$$

6．计算下列对面积的曲面积分:

（1）$\iint\limits_{\Sigma}\left(z+2x+\dfrac{4}{3}y\right)\mathrm{d}S$ ，其中$\Sigma$为平面 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分;

（2）$\iint\limits_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)\mathrm{d}S$ ，其中$\Sigma$为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分;

（3）$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$ ，其中$\Sigma$为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geqslant h\ (0<h<a)$ 的部分;

（4）$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$ ，其中$\Sigma$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

**解**：（1）$\Sigma: z=4-2x-\dfrac{4}{3}y$，$D_{xy}$：$0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1-\dfrac{3}{2}x$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS=\iint_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_{D_{xy}}dxdy=4\sqrt{61}.$$

（2）$\Sigma$: $z=6-2x-2y$, $D_{xy}$: $0\leqslant y\leqslant 3-x$, $0\leqslant x\leqslant 3$,

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=3dxdy,$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(2xy-2x^2-x+z)dS&=\iint_{D_{xy}}(2xy-2x^2-x+6-2x-2y)3dxdy\\&=3\int_0^3dx\int_0^{3-x}(6-3x-2x^2+2xy-2y)dy\\&=3\int_0^3(3x^3-10x^2+9)dx=-\frac{27}{4}.\end{aligned}$$

（3）$\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant a^2-h^2$

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2+y^2}}\right)^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

$$\iint_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint_{D_{xy}}(x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2})\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$$=\iint_{D_{xy}}adxdy=a|D_{xy}|=\pi a(a^2-h^2)\ (\text{根据区域的对称性及函数的奇偶性}).$$

（4）$\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 2ax$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\sqrt{2}dxdy,$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS&=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho^2(\cos\theta+\sin\theta)]\rho d\rho\\&=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta)d\theta\\&=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.\end{aligned}$$

7．求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的质量，此壳的面密度为 $\mu=z$.

**解：** $\Sigma$： $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$，$D_{xy}: x^2+y^2\leqslant 2$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

故
$$M=\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)\,.$$

8．求面密度为$\mu_0$的均匀半球壳 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$对于 $z$ 轴的转动惯量.

**解**：$\Sigma$: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

$$I_z=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mu_0\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=a\mu_0\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{\rho^2}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4}{3}\pi\mu_0a^4.$$

【习题 11-5】

3．计算下列对坐标的曲面积分:

（1）$\iint\limits_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧;

（2）$\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 $\Sigma$ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧;

（3）$\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x, y, z)$为连续函数，$\Sigma$是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧;

（4）$\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$是平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

**解**：（1）$\Sigma$的方程为 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ , $D_{xy}$: $x^2+y^2\leqslant R$，于是

$$\iint_{\Sigma}x^2y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}x^2y^2(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^2\sin\theta\cdot\sqrt{R^2-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{R^2-\rho^2}\rho^5\mathrm{d}\rho=\frac{2}{105}\pi R^7.$$

（2）$\Sigma$在 $xOy$ 面的投影为零，故 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ .

$\Sigma$可表示为 $x=\sqrt{1-y^2}$ , $(y, z)\in D_{yz}=\{(y, z)|0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 3\}$，故

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=3\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y$$

$\Sigma$可表示为 $y=\sqrt{1-x^2}$ , $(z, x)\in D_{zx}=\{(z, x)|0\leqslant z\leqslant 3, 0\leqslant x\leqslant 1\}$，故

$$\iint_{\Sigma} y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^3\mathrm{d}z\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x .$$

因此 $\displaystyle\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2\left(3\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\right)=6\times\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi .$

（另解）$\Sigma$ 前侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(2x, 2y, 0)$，单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0),$$

由两种曲面积分之间的关系，

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{3}{2}\pi .$$

（3）曲面$\Sigma$可表示为 $z=1-x+y$ , $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x-1\}$，
$\Sigma$上侧的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1, -1, 1)$，单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

由两类曲面积分之间的联系可得

$$\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}[(f+x)\cos\alpha+(2f+y)\cos\beta+(f+z)\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[(f+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+(2f+y)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+(f+z)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$$

（4）**解法一**：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

$\Sigma_1$: $x=0$ 的后侧，$D_{yz}$: $0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1-y$,

$\Sigma_2$: $y=0$ 的左侧，$D_{zx}$: $0\leqslant z 1, 0\leqslant x\leqslant 1-z$,

$\Sigma_3$: $z=0$ 的下侧， $D_{xy}$: $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$,

$\Sigma_4$: $z=1-x-y$ 的上侧，$D_{xy}$: $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x$,

曲面$\Sigma_1$ 和$\Sigma_2$ 在 $xOy$ 面上的投影为零，于是

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+0+\iint_{\Sigma_3} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y = \frac{1}{24}.$$

由积分变元的轮换对称性可知

$$\oiint_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{1}{24}.$$

因此

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 3\times\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

**解法二：**$\Sigma = \Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 是位于坐标面上的三块;

$$\Sigma_4: z = 1-x-y，D_{xy}: 0\leqslant x\leqslant 1，0\leqslant y\leqslant 1-x.$$

显然在 $\Sigma_1$、$\Sigma_2$、$\Sigma_3$ 上的曲面积分均为零，于是

$$\oiint_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= \iint_{\Sigma_4}(xy\cos\alpha + yz\cos\beta + xz\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \sqrt{3}\iint_{\Sigma_4}(xy+yz+xz)\mathrm{d}S$$

$$= 3\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)(1-x-y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

4．把对坐标的曲面积分 $\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化成对面积的曲面积分，其中

（1）Σ是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

（2）Σ是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 $xOy$ 面上方的部分的上侧.

**解:**（1）令 $F(x,y,z)=3x+2y+2\sqrt{3}z-6$，Σ上侧的法向量为:

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(3,\ 2,\ 2\sqrt{3}),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{5}(3,\ 2,\ 2\sqrt{3}),$$

于是

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\frac{1}{5}(3P+2Q+2\sqrt{3}R)\mathrm{d}S.$$

（2）令 $F(x,y,z)=z+x^2+y^2-8$, Σ上侧的法向量

$$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,1),$$

单位法向量为

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2x,\ 2y,\ 1),$$

于是
$$\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$
$$=\iint_\Sigma\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(2xP+2yQ+R)\mathrm{d}S.$$

## 11.2.6　练习题

1．设曲面 $S$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分，计算曲面 $S$ 的面积 $I$.

2．求抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=1$ 所割下的有界部分 $\Sigma$ 的面积.

3．设曲面 $\Sigma$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 被平面 z = 1 截出的顶部，计算 $I=\iint_\Sigma\frac{1}{z}\mathrm{d}S$.

4．计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma$ 是柱面 $x^2+y^2=4$ 介于 $0\leqslant z\leqslant 6$ 的部分.

5. 计算对面积的曲面积分 $\iint_\Sigma y^2z^2\mathrm{d}s$，　$\Sigma$: $z=\sqrt{x^2+y^2}$,其中$1\leqslant z\leqslant 2$.

6．求均匀半球面　$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

7．计算 $\iint_\Sigma(x+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为平面 $x+y+z=1, x=0,\ y=0,$ $z=0$ 所围立体的表面的外侧.

8．把第二类曲面积分化为第一类曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：抛物面 $y=2x^2+z^2$ 被平面 $y=2$ 所截的部分的左侧.

## 练习题答案

1．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　2．$\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$　　3．$4\pi\ln 2$　　4．$288\pi$　　5．$\frac{21\sqrt{2}\pi}{2}$　　6．$\frac{a}{2}$

7．$\frac{1}{2}$　　8．$\iint_\Sigma\frac{4xP(x,y,z)-Q(x,y,z)+2zR(x,y,z)}{\sqrt{1+16x^2+4z^2}}\mathrm{d}S$

## 11.2.7　考研真题

**【例 1】**（2010 年数一）　设 $P$ 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 $S$ 在点 $P$ 处的切平面与 $xOy$ 面垂直,（1）求点 $P$ 的轨迹 $C$；（2）计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S$，其中 $\sum$ 是椭球面 $S$ 位于曲线 $C$ 上方的部分.

**解**：（1）切平面法向量为 $F_x=2x, F_y=2y-z, F_z=2z-y$，因切平面与 $xOy$ 面垂直，故两者的法向量相互垂直：$2x\times 0+(2y-z)\times 0+(2z-y)\times 1=0\Rightarrow z=\frac{y}{2}$

所以轨迹为 C： $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-yz=1 \\ y=2z \end{cases}$

（2）因为 $\Sigma$ 是椭球面 $S$ 位于曲线 $C$ 上方的部分，所以 $2z \geqslant y$ 对椭球面方程用隐函数求导公式：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{2x}{y-2z}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z-2y}{2z-y}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2z-y}\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因为 $\Sigma$ 在 $xOy$ 面的投影区域 $D_{xy}=x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1$（由 $C$ 方程消去 z），所以

$$原式=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})(2z-y)}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=0+\sqrt{3}\pi\times 1\times\sqrt{\frac{4}{3}}=2\pi$$

**【例2】**（2012年数一）设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$，则 $\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=$ ________.

**解**：因为 $z=1-x-y,z_x=-1,z_y=-1$，曲面在 $xOy$ 面上的投影为 $D$:$\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,$ $0\leqslant y\leqslant 1-x\}$，则

$$\iint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\iint_{D}y^2\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{3}\iint_{D}y^2\mathrm{d}\sigma=\sqrt{3}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}y^2\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

# 11.3 格林公式、高斯公式和斯托克斯公式

## 11.3.1 基本要求

1．掌握格林公式并会运用平面曲线积分与路径无关的条件计算曲线积分；
2．理解二元函数的全微分求积；
3．理解高斯公式的概念与性质，会用高斯公式计算曲面积分；
4．理解斯托克斯公式的概念与性质，会用该公式计算有关积分；
5．了解向量场、散度和旋度以及高斯公式和斯托克斯公式的物理意义

## 11.3.2 基本内容

### 1．单连通域与复连通域

设 $D$ 为平面区域，如果 $D$ 内任一闭曲线所围的部分都属于 $D$，则称 $D$ 为平面单连通域，否则称为复连通域.

### 2．格林公式

设闭区域 $D$ 由分段光滑的曲线 $L$ 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 $D$ 上具有一阶连续偏导数，

则有格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

其中 $L$ 是 $D$ 的取正向的边界曲线.

### 3．平面曲线积分与路径无关的定义

设 $G$ 是一个开区域，$P(x, y)$、$Q(x, y)$在 $G$ 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 $G$ 内任意两点 $A$、$B$ 以及 $G$ 内从点 $A$ 到点 $B$ 的任意两条曲线 $L_1$、$L_2$，等式

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

恒成立，则称曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 $G$ 内与路径无关，否则称与路径有关.

注：曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 $G$ 内与路径无关等价于沿 $G$ 内任意闭曲线 $C$ 的曲线积分 $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 等于零.

### 4．曲线积分与路径无关的充分必要条件

设开区域 $G$ 是一个单连通域，函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 $G$ 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 $G$ 内与路径无关（或沿 $G$ 内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是等式 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $G$ 内恒成立.

注：（1）定理要求区域 $G$ 是单连通区域，且函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 $G$ 内具有一阶连续偏导数. 如果这两个条件之一不能满足，那么定理的结论不一定成立.

（2）区域 $G$ 内破坏函数 $P$、$Q$ 及 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 、$\frac{\partial Q}{\partial x}$ 连续性的点称为奇点.

### 5．二元函数的全微分求积

设开区域 $G$ 是一个单连通域，函数 $P(x, y)$及 $Q(x, y)$在 $G$ 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y$ 在 $G$ 内为某二元函数 $u(x, y)$的全微分的充分必要条件是等式 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 在 $G$ 内恒成立.

### 6．高斯公式

设空间闭区域 $\Omega$ 是由分片光滑的闭曲面 $\Sigma$（$\Sigma$ 取外侧）所围成，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在 $\Omega$ 上具有一阶连续偏导数，则有高斯公式

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}v = \oiint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

或

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}v = \oiint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

这里 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 $\Sigma$ 在点 $(x,y,z)$ 处的法向量的方向余弦.

注：高斯公式给出了空间区域 $\Omega$ 上的三重积分与其边界曲面 $\Sigma$ 上的第二类曲面积分之间的联系，所以在计算闭曲面的第二类曲面积分时可以利用该公式作转化计算.

## 7. 斯托克斯公式

设 $\Gamma$ 为分段光滑的空间有向闭曲线，$\Sigma$ 是以 $\Gamma$ 为边界的分片光滑的有向曲面，$\Gamma$ 的正向与 $\Sigma$ 的侧符合右手规则，函数 $P(x, y, z)$、$Q(x, y, z)$、$R(x, y, z)$在曲面 $\Sigma$ 上具有一阶连续偏导数，则有斯托克斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

即：

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

或

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$为有向曲面 $\Sigma$ 的单位法向量.

注：(1) 斯托克斯公式给出了曲面 $\Sigma$ 上的第二类曲面积分与其边界曲线 $\Gamma$ 上的第二类曲线积分之间的联系，利用该公式可以作转化计算；

(2) 当曲面 $\Sigma$ 是 $xOy$ 面上的平面区域时，斯托克斯公式就成为格林公式，因此格林公式是斯托克斯公式的特殊情形.

## 8. 通量与散度

设向量场

$$\boldsymbol{A}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

其中 $P$，$Q$，$R$ 具有一阶连续偏导数，$\Sigma$ 是场内的一片有向曲面，$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 $\Sigma$ 上点$(x, y, z)$处的单位法向量，则积分 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 $\Sigma$ 向着指定侧的通量(或流量)，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，记作 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

由高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iint\limits_{\Sigma}v\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中流速场 $\boldsymbol{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 $\Sigma$ 上点 $(x,y,z)$ 处的单位法向量.

高斯公式右端可解释为流速场 $\boldsymbol{v}$ 通过闭曲面 $\Sigma$ 流向外侧的流量（通量），即流体在单位时间内离开闭区域 $\Omega$ 的总质量.设流体是不可压缩且流动稳定的，所以流体在离开 $\Omega$ 的同时，$\Omega$ 内必须产生等量的流体进行补充，故高斯公式左端可以解释为分布在 $\Omega$ 内的源头在单位时间内所产生的流体的总质量. 散度 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ 反映了流体在点 $(x,y,z)$ 的源头强度.

将流速场 $\boldsymbol{v}$ 改为一般的向量场 $\boldsymbol{A}=(P,Q,R)$，可得到高斯公式的另一表现形式：

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\text{，或}\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}A_n\mathrm{d}S$$

### 9. 环流量与旋度

（1）环流量：设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

其中 $P,Q,R$ 均连续，$\Gamma$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的定义域内的一条分段光滑的有向闭曲线，$\tau$ 是 $\Gamma$ 在点 $(x,y,z)$ 处的单位切向量，则积分

$$\oint_{\Gamma}A\cdot\tau\mathrm{d}s$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 $\Gamma$ 的环流量.

（2）旋度：设向量场 $\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$

其中 $P,Q,R$ 均具有一阶连续偏导数，则向量

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度，记为 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$，即

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

旋度的记忆法：
$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}.$$

如果向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\boldsymbol{A}$ 处处为零，则称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场，而一个无源、无旋的向量场称为调和场.

注：（1）斯托克斯公式的另一形式：

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s\text{，或}\iint_{\Sigma}(\mathbf{rot}\boldsymbol{A})_n\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}A_{\tau}\mathrm{d}s$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $\Sigma$ 上点 $(x,y,z)$ 处的单位法向量，$\boldsymbol{\tau}$ 是 $\Sigma$ 的正向边界曲线 $\Gamma$ 上点 $(x,y,z)$ 处的单位切向量.

（2）斯托克斯公式的解释：向量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 $\Gamma$ 的环流量等于向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度通过 $\Gamma$ 所张的曲面 $\Sigma$ 的通量（$\Gamma$ 的正向与 $\Sigma$ 的侧应符合右手法则）.

## 11.3.3 典型例题

【例 1】 计算$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$，其中$L$为圆周$x^2+y^2=a^2$，取顺时针方向.

解：
$$\oint_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{1}{a^4}\oint_L (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y \overset{\text{格林公式}}{=} -\frac{1}{a^4}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} -2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2\pi}{a^2}.$$

评注：使用格林公式 $\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 时，要注意$L$是$D$的取正向的边界曲线，且 $P(x,\ y)$及 $Q(x,\ y)$在 $D$ 上具有一阶连续偏导数，两个条件缺一不可. 本题将$x^2+y^2=a^2$代入分母后的积分满足格林公式条件，注意$L$取负向，所以要加负号.

【例2】计算积分$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$，其中$L$为圆周$(x-1)^2+y^2=R^2(R>0且R\neq 1)$（按逆时针方向.）

解：因为$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$，故$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$

当$R<1$时，由于$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$在$(x-1)^2+y^2\leqslant R^2(R\neq 1)$所围的区域$D$内有一阶连续偏导数，满足格林公式条件. 所以 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_D 0\mathrm{d}\sigma=0$

当$R>1$时，$L$所围的区域$D$上含有点$(0,0)$（奇点），所以$P,Q$在区域$D$上不满足格林公式条件，不能直接用格林公式.

做闭曲线$l:4x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$取得足够小保证$l$含在$L$所围区域）将奇点围住，方向为逆时针，即
$$l\begin{cases}x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta\\ y=\varepsilon\sin\theta\end{cases}\qquad \theta\in[0,2\pi)$$

则曲线$L+l^-$围成复连通域$D_1$且为$D_1$的正向边界. 因在复连通域$D_1$：$\int_{L+l^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$满足格林公式条件，故
$$\int_{L+l^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\iint\limits_{D_1}0\mathrm{d}\sigma=0 \text{ 即}\int_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=-\int_{l^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi$$

评注：当$P,Q$在$D$上有奇点时，通常采取上述办法作充分小的闭曲线将奇点围住，再在复连通域（已无奇点，满足格林公式条件）上用格林公式. 注意边界曲线的正向外环是逆时针方向，内环是顺时针方向.

【例 3】 证明曲线积分 $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$ 在$xOy$坐标面上与路径无关，并计算积分.

**解法一：** 由于$P=6xy^2-y^3,Q=6x^2y-3xy^2$在单连通域$xOy$面有一阶连续偏导数，且$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=12x-3y^2=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以曲线积分在$xOy$面上与路径无关，取折线路径：

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y$$
$$=\int_1^3(6x\times 2^2-2^3)\mathrm{d}x+\int_2^4(6\times 3^2\times y-3\times 3\times y^2)\mathrm{d}y=236$$

**解法二：** 设：　$u(x,y)=\int(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x=3x^2y^2-xy^3+\varphi(y)$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=6x^2y-3xy^2+\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=6x^2y-3xy^2$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=0$，所以 $\varphi(y)=C$，$u(x,y)=3x^2y^2-xy^3+C$，故

$$\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(6x^2y-3xy^2)\mathrm{d}y=u(3,4)-u(1,2)=236$$

**评注：** 两种解法都是根据定理的充要条件：$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$进行的. 解法一选取的是与坐标轴平行的折线路径，这样计算量较少，注意折线上不能有奇点；解法二是通过全微分方程求原二元函数，注意写出$\varphi(y)$，求出$\varphi(y)$，从而确定$u(x,y)$，而积分值就是$u(x,y)$在起讫点的增量.

**【例 4】** 设曲线积分$\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\mathrm{d}x-f(x)\cos y\mathrm{d}y$在整个$xOy$面上与路径无关，其中$f(x)$具有一阶连续导数，且$f(0)=0$，求$f(x)$.

**解：** 由题设知 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$　（$(x,y)\in R^2$），即

$$\frac{\partial}{\partial x}\{-f(x)\cos y\}=\frac{\partial}{\partial y}\{[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\}\Rightarrow -f'(x)=f(x)-\mathrm{e}^x.$$

故$f(x)$是一阶线性微分方程$y'+y=\mathrm{e}^x$满足$y\big|_{x=0}=0$的特解，由通解公式：

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x+C\mathrm{e}^{-x}\text{，}\because\ y(0)=0\therefore C=-\frac{1}{2}\text{，}\ f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}.$$

**评注：** 解题的关键是由积分与路径无关的必充条件$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$得到关于$f(x)$的微分方程，然后根据微分方程的类型求出通解，再定特解. 这类综合题常常出现在考研中.

**【例 5】** 证明$\oint_L\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=0$的充分必要条件为：$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$，其中$L$是单连通域$G$内的一条简单闭曲线，$v(x,y)$在$G$内具有连续的二阶偏导数.

**证明：** 依题意 $P=-\dfrac{\partial v}{\partial y},Q=\dfrac{\partial v}{\partial x}$在$G$内具有一阶连续偏导数，又$\oint_L\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=0$的充要条件为$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，由于$\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

故$\oint_L\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}y-\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}x=0$的充分必要条件为$-\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$，即$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

**评注**：此题的要点是 $v(x,y)$ 在 $G$ 内具有连续的二阶偏导数，由此知 $P=-\dfrac{\partial v}{\partial y},Q=\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 在 $G$ 内具有一阶连续偏导数，满足定理条件.

**【例 6】** 证明 $(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+(y^3-3x^2y)\mathrm{d}y$ 是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求出一个 $u(x,y)$ .

**解**：因为 $P=x^3-3xy^2,Q=y^3-3x^2y$ 在 $xOy$ 面有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-6xy=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ，故 $(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+(y^3-3x^2y)\mathrm{d}y$ 在 $xOy$ 面是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分.

**解法一**：$u(x,y)=\int(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+\varphi(y)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{3}{2}x^2y^2+\varphi(y)$ ，故

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-3x^2y+\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=y^3-3x^2y\text{ ，得 }\frac{\mathrm{d}\varphi(y)}{\mathrm{d}y}=y^3\Rightarrow\varphi(y)=\frac{1}{4}y^4+C$$

令 $C=0$，得

$$u(x,y)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{1}{4}y^4$$

**解法二**：

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^3-3xy^2)\mathrm{d}x+(y^3-3x^2y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x(x^3-3x\times0)\mathrm{d}x+0+0+\int_0^y(y^3-3x^2y)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}y^4-\frac{3}{2}x^2y^2$$

**评注**：因为只求一个 $u(x,y)$ ，所以解法一中的 $C$ 可以取任意定值，解法二中的点 $(0,0)$ 也可以取 $xOy$ 面内任意点.

**【例 7】** **计算** $\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 　其中 $\Sigma$ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=0$ 、$z=h(h>0)$ 所围成的空间区域的整个边界的外侧.

**解**：这里 $P=y-z$ ，$Q=z-x$ ，$R=x-y$ ，用高斯公式计算，得

$$\oiint\limits_{\Sigma}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(0+0+0)\mathrm{d}v=0,$$

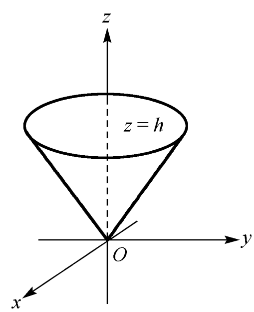


图 11-3-1

其中 $\Omega$ 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=h(h>0)$ 所围成的空间闭区域.

**评注**：因为 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在 $\Omega$ 上具有一阶连续偏导数且取外侧，所以可以用高斯公式化为三重积分计算，简单快捷. 如果用直接法去解此题则繁琐得多.

**【例 8】** 计算 $\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，$\Sigma$ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4(z\geqslant0)$ 的上侧.

**解**：补充曲面 $\Sigma_1:z=0,D_{xy}:x^2+y^2\leqslant4$ ，取下侧.则

$$\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 4(z \geqslant 0)$

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 z\pi(4-z^2)\mathrm{d}z = 4\pi \text{（先二后一法）}$$

由$\Sigma_1: z=0, D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 4$，取下侧，有

$$\iint_{\Sigma_1} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 + 2\iint_{\Sigma_1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -2\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -8\pi \text{，故}$$

$$\iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 12\pi$$

**评注**：补充曲面后，由于$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在有界闭域$\Omega$上具有一阶连续偏导数且取外侧，所以可以利用高斯公式计算，然后减去补充曲面的积分值. 注意三重积分中被积函数仅含$z$，所以采取先二后一计算法较易.

**【例 9】** 设$f$是连续可导函数，计算曲面积分$\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为锥面$x=\sqrt{y^2+z^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$及$x^2+y^2+z^2=4$所围立体表面的外侧.

**解**：由高斯公式：

$$\begin{aligned}&\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iiint_{\Omega}\left(3x^2+\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= \iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^2\ r^2\mathrm{d}r = \frac{93(2-\sqrt{2})}{5}\end{aligned}$$

**评注**：因为$f$是连续可导函数，所以积分满足高斯公式条件，化为三重积分后用球面坐标计算十分简便.

**【例 10】** 设空间区域$\Omega$由曲面$z=a^2-x^2-y^2$与平面$z=0$围成，其中$a$为正常数，记$\Omega$表面的外侧为$\Sigma$，$\Omega$的体积为$V$，证明：

$$\oiint_{\Sigma} x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1+xyz)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = V$$

**证明**：因为$P(x,y,z)=x^2yz^2, Q(x,y,z)=-xy^2z^2, R(x,y,z)=(1+xyz)z$，$\frac{\partial P}{\partial x}=2xyz^2$，$\frac{\partial Q}{\partial y}=-2xyz^2$，$\frac{\partial R}{\partial z}=1+2xyz$，由高斯公式得

$$\oiint_{\Sigma} x^2yz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - xy^2z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (1+xyz)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(2xyz^2-2xyz^2+1+2xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega}(1+2xyz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{a^2-\rho^2}(1+2z\rho^2\sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{a^2-\rho^2}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{a^2-\rho^2}2z\rho^2\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{a^2-\rho^2}\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\mathrm{d}\rho\int_0^{a^2-\rho^2}z\mathrm{d}z$$

$$=V+0=V$$

**评注**：因为 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在旋转抛物面 $z=a^2-x^2-y^2$ 与平面 $z=0$ 围成的立体 $\Omega$ 上满足高斯定理条件，所以可以利用高斯公式. 计算上：由于 $\int_0^{2\pi}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta=0$ 且中层积分限是常数，所以 $\iiint\limits_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$；或者根据 $\Omega$ 关于 4 个卦限的对称性以及被积函数 $xyz$ 的反对称性知 $\iiint\limits_\Omega xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

**【例 11】** 利用高斯公式计算三重积分

$$\iiint\limits_\Omega (xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega$ 是由 $x\geqslant 0$， $y\geqslant 0$， $0\leqslant z\leqslant 1$ 及 $x^2+y^2\leqslant 1$ 所确定的空间闭区域.

**解**：如右图 11-3-2 所示，$\Omega$ 的边界由闭曲面

$$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4+\Sigma_5$$

所围成，取 $\Sigma$ 的外侧. 令 $P=Q=R=xyz$，那么由高斯公式得

$$\iiint\limits_\Omega (xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

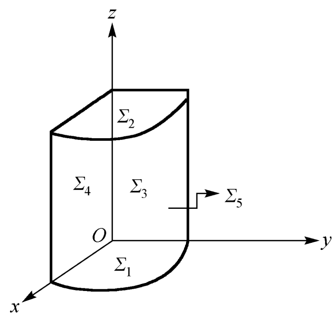


图 11-3-2

在 $yOz$ 面上：

$$\iint\limits_{\Sigma_1}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_2}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_4}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

而

$$\iint\limits_{\Sigma_3}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}0\cdot yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_5}xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{yz}}\left(\sqrt{1-y^2}\right)yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\left(\sqrt{1-y^2}\right)\mathrm{d}y\int_0^1 z\mathrm{d}z=\frac{1}{6},$$

故

$$\oiint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6}$$

同理可得
$$\oiint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{1}{6},\quad \oiint\limits_\Sigma xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3}$$

所以

$$\iiint\limits_\Omega (xy+yz+zx)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{11}{24}$$

**评注**：本题是一道逆向题. 根据三重积分被积函数的特点构造出 $P,Q,R$（要求其在 $\Omega$ 上无奇点），取外侧化为闭曲面上的第二类曲面积分. 这是本题的第二种解法.

**【例 12】** 利用斯托克斯公式计算曲线积分

$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$，其中 $L$ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面的交线，其正向为逆时针方向，与平面 $x+y+z=1$ 上侧的法向量之间符合右手规则.

**解**：由斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}&\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z\\ =&\iint_\Sigma (2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$\Sigma$：$x+y+z=1\ (x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$，取上侧. 由于

$$\iint_\Sigma (2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}}(2y-2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(2y-2z)\mathrm{d}z=0,$$

$$\iint_\Sigma (2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{D_{zx}}(2z-2x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}(2z-2x)\mathrm{d}x=0,$$

$$\iint_\Sigma (2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(2x-2y)\mathrm{d}y=0,$$

故

$$\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=0$$

**评注**：斯托克斯公式给出了曲面 $\Sigma$ 上的第二类曲面积分与其边界曲线 $\Gamma$ 上的第二类曲线积分之间的联系，两者方向符合右手规则且要求 $P,Q,R$ 在曲面 $\Sigma$ 上有一阶连续偏导数. 这是利用斯托克斯公式作转化计算的条件，公式为：$\iint\limits_\Sigma\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\oint\limits_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$. 本题就是这样转化的，由于平面和被积函数的对称性使曲面积分的三项均相等.

**【例 13】** 计算 $\oint_\Gamma (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma$ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ （$a>0,h>0$）的交线，若从 $z$ 轴的正向望去，$\Gamma$ 的方向是逆时针方向.

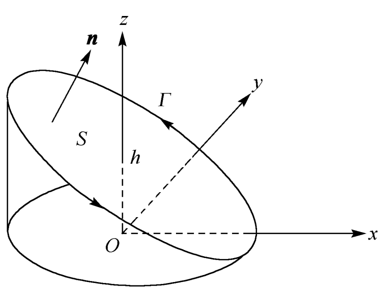



图 11-3-3

**解**：如图 11-3-3，平面$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$上由曲线$\Gamma$所围成的区域记为$S$，$S$的方向根据右手规则取上侧. 令$F=\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}-1$，则$S$的法向量$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=\dfrac{1}{ah}(h,0,a)$，取$\boldsymbol{n}=(h,0,a)$，所以$S$的单位法向量为$\boldsymbol{n}_e=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(h,0,a)$，方向余弦为$\cos\alpha=\dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}$，由斯托克斯公式：

$$\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}} & 0 & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_S\left(-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\frac{a+h}{\sqrt{a^2+h^2}}\iint_{D_{xy}}\frac{1}{a}\sqrt{a^2+h^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi a(a+h).$$

**评注**：由于$P,Q,R$符合斯托克斯定理条件，所以可以用该公式作转化计算. 注意点是$S$的方向要依据右手规则而定，从而法向量的方向也要一致，最后化为第一类曲面积分.

## 11.3.4　释疑解难

1．运用格林公式时应注意什么？

答：格林公式给出了平面区域上的二重积分与其边界曲线（取正向）上的曲线积分之间的联系. 在应用格林公式时应注意观察$P(x,y)$、$Q(x,y)$在闭区域$G$上一阶偏导数是否连续，即是否有奇点（$G$上破坏函数$P$、$Q$及$\dfrac{\partial P}{\partial y}$、$\dfrac{\partial Q}{\partial x}$连续性的点）的问题. 例如：设$L$为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，$L$的方向为逆时针方向，问$\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$是否一定成立？这取决于$G$上有无奇点. 由于$P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$和$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$在点(0，0)不连续. 且当$x^2+y^2\neq0$时，$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以如果奇点(0，0)不在$L$所围成的区域$G$上时，则结论成立；而当(0，0)在$G$上时，结论未必成立.

2．格林公式、高斯公式和斯托克斯公式，有哪些应用价值？

答：这三个公式都是多元函数积分学的基本公式，在理论和应用上都有重要意义.

（1）三个公式分别建立了平面曲线积分与二重积分、曲面积分与三重积分、空间曲线积分与曲面积分之间的关系，它们和牛顿——莱布尼兹公式一起，奠定了微积分学体系的理论基础，为各种积分之间，微分与积分之间的转化提供了理论依据；

（2）三个公式统称为场论三大公式，是研究许多物理现象的重要数学工具；

（3）由格林公式导出了平面曲线积分与路经无关的充要条件，导出了二元函数全微分求积的判定定理，为解全微分方程提供了理论依据和具体解法；

由高斯公式导出了曲面积分与积分曲面无关（只取决于曲面的边界曲线）的充要条件，从而提供了空间无源场的特征刻画；

由斯托克斯公式导了出空间曲线积分与路经无关的充要条件，从而给出空间无旋场的特征刻画；导出了三元函数全微分求积的判定条件和具体方法；若斯托克斯公式中的曲面 $\Sigma$ 位于坐标面上（例如 $\Sigma$ 在 $xOy$ 坐标面上，取上侧），则斯托克斯公式就成为格林公式，由此知格林公式是斯托克斯公式的特例.

## 11.3.5　部分习题解答

【习题 11-3】

3．计算曲线积分 $\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$，其中 $L$ 为圆周$(x-1)^2+y^2=2$，$L$ 的方向为逆时针方向.

解：$P=\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$，$Q=\dfrac{-x}{2(x^2+y^2)}$. 当 $x^2+y^2\neq 0$ 时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}-\frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)^2}=0\,.$$

在 $L$ 内作逆时针方向的半径为$\varepsilon$的小圆周

$$l:\ x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta,\qquad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$$

在以 $L$ 和 $l$ 为边界的复连域 $D_\varepsilon$上运用格林公式得

$$\oint\limits_{L+l^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,,$$

即

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\oint_{l^-} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_l P\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\,.$$

因此

$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\oint_l \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2\sin^2\theta-\varepsilon^2\cos^2\theta}{2\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-\pi\,.$$

5．利用格林公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L (2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为三顶点分别为(0, 0)、(3, 0)和(3, 2)的三角形正向边界；

（2）$\oint_L (x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为正向星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$；

（3）$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点(0, 0)到$\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$的一段弧；

（4）$\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是在圆周 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 上由点(0, 0)到点(1, 1)的一段弧.

解：（1）$L$ 所围区域 $D$ 如图所示，$P=2x-y+4$, $Q=5y+3x-6$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=3-(-1)=4\,,$$

故由格林公式,得

$$\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x+(15y+3x-6)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=12.$$

（2）$P=x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x$，$Q=x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(2x\sin x+x^2\cos x-2y\mathrm{e}^x)-(2x\sin x+x^2\cos x-2y\mathrm{e}^x)=0\,,$$

由格林公式

$$\oint_L(x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(x^2\sin x-2y\mathrm{e}^x)\mathrm{d}y$$
$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

（3）$P=2xy^3-y^2\cos x$，$Q=1-2y\sin x+3x^2y^2$，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(-2y\cos x+6xy^2)-(6xy^2-2y\cos x)=0\,,$$

所以由格林公式

$$\oint_{-L+OA+AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

其中 $OA$、$AB$ 为补充折线成为正向封闭曲线,

故
$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{OA+AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3\pi^2}{4}y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.$$

（4）$P=x^2-y,\ Q=-x-\sin^2y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1-(-1)=0\,,$

由格林公式有

$$\int_{L+AB+BO}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\,,$$

其中 $AB$、$BO$ 为补充折线成为负向封闭曲线,

故
$$\int_L(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y=\int_{BA+OB}(x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1-(1+\sin^2y)\mathrm{d}y+\int_0^1x^2\mathrm{d}x=-\frac{7}{6}+\frac{1}{4}\sin 2\,.$$

6．验证下列 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y$ 在整个 $xOy$ 平面内是某一函数 $u(x, y)$的全微分，并求这样的一个 $u(x, y)$：

（4）$(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y$

（5）$(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$

**解**：（4）因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=3x^2+16xy=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y$ 是某个定义在整个 $xOy$ 平面内的函数 $u(x, y)$的全微分.

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+(x^3+8x^2y+12ye^y)\mathrm{d}y+C\\&=\int_0^y 12ye^y\mathrm{d}y+\int_0^x(3x^2y+8xy^2)\mathrm{d}x+C\\&=x^3y+4x^2y^2+12(ye^y-e^y)+C.\end{aligned}$$

（5）因为 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y\cos x-2x\sin y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以 $P(x, y)\mathrm{d}x+Q(x, y)\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x, y)$的全微分

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+C\\&=y^2\sin x+x^2\cos y+C.\end{aligned}$$

7．设有一变力在坐标轴上的投影为 $X=x+y^2$，$Y=2xy-8$，这变力确定了一个力场，证明质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关.

**解**：场力所作的功为 $W=\int_\Gamma(x+y^2)\mathrm{d}x+(2xy-8)\mathrm{d}y$ .

由于 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2y=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，故以上曲线积分与路径无关，即场力所作的功与路径无关.

【习题 11-6】

1．利用高斯公式计算曲面积分:

（1）$\oiint_\Sigma x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中Σ为平面 $x=0, y=0, z=0, x=a, y=a, z=a$ 所围成的立体的表面的外侧;

（2）$\oiint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧;

（3）$\oiint_\Sigma xz^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-z^3)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2xy+y^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中Σ为上半球体 $0\leqslant z\leqslant\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2\leqslant a^2$ 的表面的外侧;

（4）$\oiint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中Σ介于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2\leqslant9$ 的整个表面的外侧;

（5）$\oiint_\Sigma 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中Σ为平面 $x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧.

**解**：（1）由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v$$

$$=6\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v=6\int_0^a x\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a\mathrm{d}z=3a^4\ (这里用了对称性).$$

（2）由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$$

$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi a^5.$$

（3）由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^2r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{2}{5}\pi a^5.$$

（4）由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}v=81\pi.$$

（5）由高斯公式

$$原式=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega}(4z-2y+y)\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1(4z-y)\mathrm{d}z=\frac{3}{2}.$$

5．利用高斯公式推证阿基米德原理：浸没在液体中所受液体的压力的合力（即浮力）的方向铅直向上，大小等于这物体所排开的液体的重力.

**证明**：取液面为 $xOy$ 面，$z$ 轴沿铅直向下，设液体的密度为$\rho$，在物体表面$\Sigma$上取元素 $\mathrm{d}S$ 上一点，并设$\Sigma$在点$(x, y, z)$处的外法线的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则 $\mathrm{d}S$ 所受液体的压力在坐标轴 $x, y, z$ 上的分量分别为

$$-\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S,\ -\rho z\cos\beta\,\mathrm{d}S,\ -\rho z\cos\gamma\,\mathrm{d}S,$$

$\Sigma$所受的压力利用高斯公式进行计算得

$$F_x=\oiint\limits_{\Sigma}-\rho z\cos\alpha\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,$$

$$F_y=\oiint\limits_{\Sigma}-\rho z\cos\beta\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}0\mathrm{d}v=0,$$

$$F_z=\oiint\limits_{\Sigma}-\rho z\cos\gamma\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}-\rho\mathrm{d}v=-\rho\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v=-\rho|\Omega|,$$

其中$|\Omega|$为物体的体积. 因此在液体中的物体所受液体的压力的合力，其方向铅直向上，大小等于这物体所排开的液体所受的重力，即阿基米德原理得证.

【习题 11-7】

2．利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

（1）$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 为圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=0$，若从 $z$ 轴的正向看去，这圆周取逆时针方向;

（2）$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 为椭圆 $x^2+y^2=a^2$，$\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$ ($a>0$，$b>0$)，若从 $x$ 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向;

（3）$\oint_{\Gamma} 3y\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+yz^2\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是圆周 $x^2+y^2=2z$，$z=2$，若从 $z$ 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向;

（4）$\oint_{\Gamma} 2y\mathrm{d}x+3x\mathrm{d}y-z^2\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是圆周 $x^2+y^2+z^2=9$，$z=0$，若从 $z$ 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向.

**解**：（1）设 $\Sigma$ 为平面 $x+y+z=0$ 上 $\Gamma$ 所围成的部分，则 $\Sigma$ 上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

于是
$$\oint_{\Gamma} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(-\cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma)\mathrm{d}S=-\frac{3}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=-\sqrt{3}\pi a^2.$$

提示：$\Sigma$ 是半径为 $a$ 的圆面.

（2）设 $\Sigma$ 为平面 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{b}=1$ 上 $\Gamma$ 所围成的部分，则 $\Sigma$ 上侧的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ 0,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

于是
$$\oint_{\Gamma}(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(-2\cos\alpha-2\cos\beta-2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{-2(a+b)}{a}\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi a(a+b).$$

提示：$\Sigma$（即 $z=b-\dfrac{b}{a}x$）的面积元素为 $\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（3）设Σ为平面 $z=2$ 上Γ所围成的部分的上侧，则

$$\oint_\Gamma 3y\mathrm{d}x - xz\mathrm{d}y + yz^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - (z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -5\pi\times 2^2 = -20\pi.$$

（4）设Σ为 $xOy$ 面上的圆 $x^2+y^2\leqslant 9$ 的上侧，则

$$\oint_\Gamma 2y\mathrm{d}x + 3x\mathrm{d}y - z^2\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} = \iint_\Sigma \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 9\pi.$$

## 11.3.6　练习题

1. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为曲线 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant \pi$ 与直线段 $y=0, 0\leqslant x\leqslant \pi$ 所围闭区域 $D$ 的正向边界.

2. 计算 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - m)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为圆 $(x-a)^2+y^2=a^2 (a>0)$ 的上半圆周，方向为从点 $A(2a,0)$ 沿 $L$ 到原点 O.

3. 计算曲线积分 $\int_L \dfrac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 其中 $L$ 是沿着圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 从点 A(0, 1) 到点 B(2, 1)的上半单位圆弧.

4. 确定 $\lambda$ 的值，使曲线积分 $\int_C (x^2+4xy^\lambda)\mathrm{d}x + (6x^{\lambda-1}y^2-2y)\mathrm{d}y$ 在 $xOy$ 平面上与路径无关. 当起点为 $(0,0)$，终点为 $(3,1)$ 时，求此曲线积分的值.

5. 设 $f(x)$ 可微，$f(0)=1$ 且曲线积分 $\oint_L [2f(x)+\mathrm{e}^{2x}]y\mathrm{d}x + f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关. 求 $f(x)$.

6. 证明在整个 $xOy$ 平面上，$(\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - mx)\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分，求这样的一个函数，并计算 $\int_L (\mathrm{e}^x\sin y - my)\mathrm{d}x + (\mathrm{e}^x\cos y - mx)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的任意一条路径.

7. 计算 $I=\iint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中曲面 $S$ 为 $x+y+z=1$，$x=0$，$y=0$，$z=0$ 所围立体的表面外侧.

8. 计算 $I=\iint_\Sigma yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + xz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 是 $x^2+y^2+(z-a)^2=a^2$，$0\leqslant z\leqslant a$，取下侧.

9. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 是旋转抛物面 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 及 $z=2$ 之间部分的下侧.

10. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧.

11. 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中 $\Sigma$ 为曲面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}\,(z\geqslant 0)$ 的上侧.

## 练习题答案

1. $\dfrac{4}{9}$　　2. $\dfrac{m\pi a^2}{2}$　　3. $\dfrac{1}{2}\ln 5-\arctan 2$　　4. $\lambda=3$，积分值 $=26$

5. $f(x)=\mathrm{e}^{2x}(x+1)$　　6. $\mathrm{e}\sin 1-m$　　7. $\dfrac{1}{8}$　　8. $-\dfrac{1}{3}\pi a^3$　　9. 0

10. $-\dfrac{\pi h^4}{4}$　　11. 0

## 11.3.7　考研真题

**【例 1】**（2004 年数一）　计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}2x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2\,(z\geqslant 0)$ 的上侧.

**解**：取 $\Sigma_1$ 为 $xOy$ 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 $\Omega$ 为由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 围成的空间闭区域，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由高斯公式知

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iiint\limits_{\Omega}6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^2+z)\mathrm{d}z\\&=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}\rho(1-\rho^2)^2+\rho^3(1-\rho^2)\right]\mathrm{d}\rho=2\pi.\end{aligned}$$

而
$$\iint\limits_{\Sigma_1}2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}-3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi,$$

故
$$I=2\pi-3\pi=-\pi.$$

**【例 2】**（2006 年数一）　设 $\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_________.

**解**：设 $\Sigma_1 : z = 1(x^2 + y^2 \leqslant 1)$，取上侧，则由高斯公式

$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

而
$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V 6\mathrm{d}v = 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 \mathrm{d}z = 2\pi ,$$

$$\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 .$$

所以
$$\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi$$

**【例 3】**（2006 年数一） 设在上半平面 $D = \{(x,y) \mid y > 0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty) = t^{-2} f(x,y)$ .

**证明**：对 $L$ 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0$ .

**证明**： $f(tx,ty) = t^{-2} f(x,y)$ 两边对 $t$ 求导得

$$xf_x'(tx,ty) + yf_y'(tx,ty) = -2t^{-3} f(x,y) .$$

令 $t=1$，则
$$xf_x'(x,y) + yf_y'(x,y) = -2f(x,y) . \qquad ①$$

设 $P(x,y) = yf(x,y), Q(x,y) = -xf(x,y)$，则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -f(x,y) - xf_x'(x,y), \frac{\partial P}{\partial y} = f(x,y) + yf_y'(x,y) .$$

则由①可得
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

故由曲线积分与路径无关的定理可知，对 $D$ 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 $L$，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x - xf(x,y)\mathrm{d}y = 0 .$$

**【例 4】**（2007 年数一） 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧.

**解**：补充曲面：$\Sigma_1 : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1, z = 0$，取下侧，由高斯公式

$$I = \iint_{\Sigma+\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{\Sigma_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} (z + 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_D 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 $\Omega$ 为 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 所围成的空间区域，$D$ 为平面区域 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leqslant 1$ .

由于区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，因此 $\iint\limits_D 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$．又

$$\iiint\limits_{\Omega}(z+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)\mathrm{d}z=\pi.$$

其中 $D_z: x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1-z$．

**【例 5】**（2008 年数一） 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是曲线 $y=\sin x$ 上从点(0, 0)到点 $(\pi, 0)$ 的一段.

**解法一**：按曲线积分的计算公式直接计算：

$$\begin{aligned}\int_L \sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y&=\int_0^{\pi}[\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)\sin x\cos x]\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\mathrm{d}x\\&=-\left[\frac{x^2\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}+\left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

**解法二**：添加辅助线，按照格林公式进行计算：

设 $L_1$ 为 $x$ 轴上从点 $(\pi,0)$ 到 $(0,0)$ 的直线段． $D$ 是 $L_1$ 与 L 围成的区域

$$\begin{aligned}\int_{L+L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y&=-\iint\limits_D\left[\frac{\partial(2(x^2-1)y)}{\partial x}-\frac{\partial(\sin 2x)}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x}4xy\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}2x\sin^2 x\mathrm{d}x=-\int_0^{\pi}x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x\\&=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}+\left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

因为
$$\int_{L_1}\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{0}\sin 2x\mathrm{d}x=0$$

故
$$\int_L\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y=-\frac{\pi^2}{2}$$

**解法三**：令 $I=\int_L\sin 2x\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\mathrm{d}y=\int_L\sin 2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y+2x^2y\mathrm{d}y=I_1+I_2$

对于 $I_1$，记 $P=\sin 2x,\quad Q=-2y$．因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0$，故 $I_1$ 与积分路径无关.

$$I_1=\int_0^{\pi}\sin 2x\mathrm{d}x=0\,.$$

对于 $I_2$，

$$I_2=\int_L 2x^2y\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}2x^2\sin x\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x^2\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$=-\left[\frac{x^2\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi}x\cos 2x\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi^2}{2}+\left[\frac{x\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi^2}{2}.$$

故
$$\int_L \sin 2xdx+2(x^2-1)y\mathrm{d}y=-\frac{\pi^2}{2}$$

**【例 6】**（2009 年数一） 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$，其中 $\Sigma$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

**解：**
$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\text{，其中 }2x^2+2y^2+z^2=4$$

∵
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad ①$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad ②$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \qquad ③$$

∴
$$①+②+③=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)=0$$

由于被积函数及其偏导数在点（0，0，0）处不连续，作封闭曲面（取外侧）$\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=R^2.0<R<\frac{1}{16}$ 由高斯公式有

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\oiint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{R^3}$$
$$=\frac{1}{R^3}\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}V=\frac{3}{R^3}\cdot\frac{4\pi R^3}{3}=4\pi$$

**【例 7】**（2011 年数一） 设 $L$ 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 $z$ 轴正向往 $z$ 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\mathrm{d}z=$________ .

**解法一：**由斯托克斯公式，$L$ 上的曲面为 $S:x+y-z=0,x^2+y^2\leqslant 1$，取上侧，

$$原式=\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} = \iint_S ydydz + xdzdx + dxdy$$

因 $z = x + y, z'_x = 1, z'_y = 1$. 法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,1,-1)$，由转换投影法：

$$\iint_S ydydz + xdzdx + dxdy = \iint_{D:x^2+y^2\leqslant 1} [y\cdot(-1) + x(-1) + 1]dxdy = \iint_{D:x^2+y^2\leqslant 1} (-x-y+1)dxdy = \pi .$$

**解法二**：$L$ 在 $xOy$ 平面上的投影曲线 $L':\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$，参数方程 $L': x=\cos t, y=\sin t, z=0$

$t$ 从 0 到 $2\pi$，则 $L$ 的参数式为 $L$： $x=\cos t, y=\sin t, z=\cos t+\sin t$， $t$ 从 0 到 $2\pi$.于是

$$原式=\int_0^{2\pi} [\cos t(\cos t+\sin t)(-\sin t) + \cos t\cos t + \frac{(\sin t)^2}{2}(\cos t - \sin t)]dt = \pi .$$

**【例 8】**（2012 年数一） 已知 $L$ 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分

$$I = \int_L 3x^2ydx + (x^3+x-2y)dy$$

**解**：补充有向直线段　　$L_1: x=0 \quad (y: 2\to 0)$

因为 $P=3x^2y,\quad Q=x^3+x-2y$ 是二元多项式，所以 $P,Q$ 在由 $L和L_1$ 所围区域 $D$ 上具有一阶连续偏导数，由格林公式

$$\int_{L+L_1} 3x^2ydx + (x^3+x-2y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D (3x^2+1-3x^2)dxdy = \iint_D 1dxdy(D的面积)$$

$$= \frac{1}{4}\times 4\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

所以
$$I = \frac{\pi}{2} - \int_{L_1} 3x^2ydx + (x^3+x-2y)dy = \frac{\pi}{2} - \int_2^0 -2ydy = \frac{\pi}{2} - 4$$

## 11.3.8　总习题十一选讲

3．计算下列曲线积分：

（1）$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 $L$ 为圆周 $x^2+y^2=ax$;

**解**：$L$ 的参数方程为 $x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\cos\theta$，$y=\dfrac{a}{2}\sin\theta\,(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，故

$$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \oint_L \sqrt{ax}ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{ax(\theta)}\cdot\sqrt{x'^2(\theta)+y'^2(\theta)}d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\cdot d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{2\pi} \left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\pi}|\cos t|\,\mathrm{d}t=a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos t\mathrm{d}t\right)=2a^2\ (\text{这里令 } t=\frac{\theta}{2}).$$

（5）$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$，其中 $L$ 为上半圆周$(x-a)^2+y^2=a^2$，$y\geqslant0$，沿逆时针方向;

**解**：这里 $P=e^x\sin y-2y,\ Q=e^x\cos y-2,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=\mathrm{e}^x\cos y-\mathrm{e}^x\cos y+2=2$ .

令 $L_1$ 为 $x$ 轴上由原点到$(2a，0)$点的有向直线段，$D$ 为 $L$ 和 $L_1$ 所围成的区域，则由格林公式

$$\oint_{L+L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^2,$$

$$\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y=\pi a^2-\int_{L_1}(\mathrm{e}^x\sin y-2y)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-2)\mathrm{d}y$$

$$=\pi a^2-\int_0^{2a}0\mathrm{d}x=\pi a^2.$$

（6）$\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z$，其中 $\Gamma$ 是用平面 $y=z$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所得的截痕，从 $z$ 轴的正向看去，沿逆时针方向.

**解**：曲线$\Gamma$的一般方程为$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ y=z\end{cases}$，其参数方程为 $x=\cos t,\ y=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin t,\ z=\dfrac{2}{\sqrt{2}}\sin t$，$t$ 从 0 变到 $2\pi$.

于是
$$\oint_\Gamma xyz\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt2}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt2}\cos t\cdot\frac{2}{\sqrt2}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt2}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{\sqrt2}{16}\pi.$$

4．计算下列曲面积分：

（1）$\iint\limits_\Sigma\dfrac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Sigma$ 是介于平面 $z=0$ 及 $z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$;

**解**：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，其中

$$\Sigma_1:x=\sqrt{R^2-y^2}，D_{xy}：-R\leqslant y\leqslant R，0\leqslant z\leqslant H，\mathrm{d}S=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

$$\Sigma_1:x=-\sqrt{R^2-y^2}，D_{xy}：-R\leqslant y\leqslant R，0\leqslant z\leqslant H，\mathrm{d}S=\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

于是
$$\iint\limits_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{R^2+z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2R\int_{-R}^{R}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{d}y\int_0^H\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

（2）$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\leqslant z\leqslant h)$ 的外侧;

**解**：这里 $P=y^2-z$，$Q=z^2-x$，$R=x^2-y$，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$.

设 $\Sigma_1$ 为 $z=h(x^2+y^2\leqslant h^2)$的上侧，$\Omega$ 为由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 所围成的空间区域，则由高斯公式

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=0,$$

而
$$\iint\limits_{\Sigma_1}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h(\rho^2\cos^2\theta-\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{4}h^4,$$

所以
$$\iint\limits_{\Sigma}(y^2-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z^2-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4}h^4.$$

（3）$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\Sigma$ 为半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧;

**解**：设 $\Sigma_1$ 为 $xOy$ 面上圆域 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 的下侧，$\Omega$ 为由 $\Sigma$ 与 $\Sigma_1$ 所围成的空间区域，则由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$
$$=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}v=3\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)=2\pi R^3,$$

而
$$\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

所以
$$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3-0=2\pi R^3.$$

5．证明：$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在整个 $xOy$ 平面除去 $y$ 的负半轴及原点的区域 $G$ 内是某个二元函数的全微分，并求出一个这样的二元函数.

**解**：这里 $P=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{y}{x^2+y^2}$. 显然，区域 $G$ 是单连通的，$P$ 和 $Q$ 在 $G$ 内具有一阶连续偏导数，并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以 $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 在开区域 $G$ 内是某个二元函数 $u(x,y)$的全微分.

$$u(x,y)=\int_{(1,\,0)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_1^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C.$$

6．设在半平面 $x>0$ 内有力 $\boldsymbol{F}=-\dfrac{k}{\rho^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$ 构成力场，其中 $k$ 为常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$．证明在此力场中场力所作的功与所取的路径无关.

**解**：场力沿路径 $L$ 所作的功为

$$W=\int_L -\frac{kx}{\rho^3}\mathrm{d}x-\frac{ky}{\rho^3}\mathrm{d}y.$$

令 $P=-\dfrac{kx}{\rho^3}$，$Q=-\dfrac{ky}{\rho^3}$．因为 $P$ 和 $Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续的偏导数，并且

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3k}{\rho^5}xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以上述曲线积分所路径无关，即力场所作的功与路径无关.

8．求均匀曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的质心的坐标.

**解**：这里$\Sigma$: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x, y)\in D_{xy}=\{(x, y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

设曲面$\Sigma$的面密度为$\rho=1$，由曲面的对称性可知，$\bar{x}=\bar{y}=0$．因为

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi a^3,$$

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}S=\frac{1}{2}\cdot 4\pi a^2=2\pi a^2,$$

所以

$$\bar{z}=\frac{\pi a^3}{2\pi a^2}=\frac{a}{2}.$$

因此该曲面的质心为$\left(0,\ 0,\ \dfrac{a}{2}\right)$.

9．设 $u(x, y)$、$v(x, y)$在闭区域 $D$ 上都具有二阶连续偏导数，分段光滑的曲线 $L$ 为 $D$ 的正向边界曲线．证明：

（1）$\displaystyle\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}\,u\cdot\mathbf{grad}\,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s$；

（2）$\displaystyle\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$，

其中 $\dfrac{\partial u}{\partial n}$、$\dfrac{\partial v}{\partial n}$ 分别是 $u$、$v$ 沿 $L$ 的外法线向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，符号 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 称为二维拉普拉斯算子.

证明　设 $L$ 上的单位切向量为 $\boldsymbol{T}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$，则 $\boldsymbol{n}=(\sin\alpha, -\cos\alpha)$.

（1）$\displaystyle\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_L v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\mathrm{d}s=\int_L\left[-v\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha+v\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha\right]\mathrm{d}s$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathbf{grad}v\cdot\mathbf{grad}u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$$

所以
$$\iint_D v\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_D(\mathbf{grad}\ u\cdot\mathbf{grad}\ v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_L v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s\,.$$

（2）
$$\int_L\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\int_L\left[u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha\right)-v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\sin\alpha-\frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_L\left[\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\alpha\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-u\frac{\partial v}{\partial y}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}-v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left[u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D(u\Delta v-v\Delta u)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

*10．求向量 $\boldsymbol{A}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 通过闭区域$\Omega=\{(x,y,z)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$的边界曲面流向外侧的通量.

**解**：设Σ为区域Ω的边界曲面的外侧，则通量为

$$\Phi=\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint_\Omega 3\mathrm{d}v=3\,.$$

11．求力 $\boldsymbol{F}=y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+x\boldsymbol{k}$ 沿有向闭曲线Γ所作的功，其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截成的三角形的整个边界，从 $z$ 轴正向看去，沿顺时针方向.

**解**：设Σ为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦部分的下侧，则力场沿其边界Γ（顺时针方向）所作的功为

$$W=\oint_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\,.$$

曲面Σ的的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,\ 1,\ 1)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由斯托克斯公式有

$$W=\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z & x\end{vmatrix}\mathrm{d}S=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma(-1-1-1)\mathrm{d}S=\sqrt{3}\iint_\Sigma\mathrm{d}S=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}.$$

# 第 12 章　无 穷 级 数

## 12.1　常数项级数的性质及审敛法

### 12.1.1　基本要求

1．理解无穷级数收敛、发散及收敛级数的和的概念；掌握级数的主要性质，特别是级数收敛的必要条件.

2．掌握正项级数的比较审敛法和比值审敛法；了解根值审敛法.

3．掌握几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ 、调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $p$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的收敛性.

4．理解级数绝对收敛与条件收敛的概念，掌握交错级数的莱布尼茨审敛法.

### 12.1.2　基本内容

**1．常数项级数的概念**

如果给定一个数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为常数项无穷级数，简称级数，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . 其中第 $n$ 项 $u_n$ 称为级数的通项或一般项. 该级数的前 $n$ 项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 $n$ 项部分和，并称数列 $\{s_n\}$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列.

**2．常数项级数收敛的概念**

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限存在，即 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，这时极限 $s$ 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s$ . 若部分和数列的极限不存在，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

### 3．常数项级数的性质

（1）级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ $(k$ 为任一常数，$k \neq 0)$ 有相同的敛散性，且若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 $s$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛于 $ks$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = k\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ .

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 分别收敛于 $s$ 与 $\sigma$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛于 $s+\sigma$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

（3）添加、去掉或改变级数的有限项，所得级数的收敛性不变.

（4）收敛级数任意加括号后所得的级数仍收敛，且其和不变.

（5）(级数收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ .

### 4．常数项级数收敛性判定方法

（1）正项级数及其收敛性判别法

若 $u_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数.

① 部分和审敛法

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

② 比较审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，那么有

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

③ 比值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$，则

当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$（或 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = +\infty$）时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

④ 根值审敛法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \rho$，则

当 $\rho < 1$ 时，级数收敛；当 $\rho > 1$（或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = +\infty$）时，级数发散；当 $\rho = 1$ 时，级数可能收敛，也可能发散.

⑤ 极限审敛法

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$是正项级数，如果$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=l>0$（或$\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=+\infty$），则级数发散；如果$p>1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}n^p u_n=l\ (0\leqslant l<+\infty)$，则级数收敛.

（2）交错级数与莱布尼茨审敛法

① 交错级数

设$u_n>0(n=1,2,\cdots)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$称为交错级数.

② 莱布尼茨审敛法

如果交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0,n=1,2,\cdots)$满足莱布尼茨条件：

$$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)\text{ 且 }\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

则该级数收敛，且其和$s\leqslant u_1$，其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\leqslant u_{n+1}$.

（3）绝对收敛与条件收敛

如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛；如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛. 对于绝对收敛的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，有如下结论：

如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必定收敛.

**5．两个重要级数**

（1）几何级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的级数称为几何级数. 几何级数的敛散性有如下结论：

当$|q|<1$时，几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$收敛于$\dfrac{a}{1-q}$；当$|q|\geqslant1$时，几何级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$发散.

（2）$p$级数

形如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$

的级数称为$p$级数. $p$级数的敛散性有如下结论：

当$p>1$时，$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$收敛；当$p\leqslant1$时，$p$级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$发散.

特别地，$p=1$ 时的 $p$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 称为调和级数. 调和级数是发散的.

### 12.1.3　典型例题

【例 1】 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$ 的收敛性.

分析：注意到此类级数的一般项可以分解为两项（或更多项）的代数和，前后项抵消后可求出它的前 $n$ 项部分和，再取极限即可判别级数的收敛性.

**解**：因为　$u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\frac{(5n+1)-(5n-4)}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)$，

所以　$s_n=\frac{1}{5}\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n+1}\right)\right]=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1}{5n+1}\right)\to\frac{1}{5}\ (n\to\infty)$.

故此级数收敛，且和为 $\frac{1}{5}$.

**评注**：（1）用定义判别级数的收敛性，需讨论部分和数列 $\{s_n\}$ 的极限是否存在，关键是求出部分和数列 $\{s_n\}$ 的简化形式，一般化简 $s_n$ 的方法有两种:

方法 1：利用等比数列的求和公式 $s_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q}\quad(q\neq1)$.

方法 2：拆项相加，如 $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$，

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})=\sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right]$$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1})-(\sqrt{2}-1)=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}+1-\sqrt{2}.$$

若 $s_n$ 不易化简，则考虑用其他方法.

（2）此类正项级数的收敛性也可以利用比较审敛法的极限形式（或用极限审敛法）解决. 解法如下:

令 $u_n=\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$，　$v_n=\frac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(5n-4)(5n+1)}=\frac{1}{25}$.

由比较审敛法的极限形式知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的收敛性.

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 是收敛的 $p$ 级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

【例 2】 判别级数 $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{6}+\cdots$ 的收敛性.

**解**：级数的一般项 $u_n=\sin\frac{n\pi}{6}$，注意到

$$2\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{n\pi}{6}=\cos\frac{2n-1}{12}\pi-\cos\frac{2n+1}{12}\pi \quad (n=1,2,\cdots),$$

从而

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\pi}{12}s_n&=2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{2\pi}{6}+\cdots+2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{n\pi}{6}\\&=\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{3\pi}{12}+\cos\frac{3\pi}{12}-\cos\frac{5\pi}{12}+\cdots+\cos\left(\frac{2n-1}{12}\pi\right)-\cos\left(\frac{2n+1}{12}\pi\right)\\&=\cos\frac{\pi}{12}-\cos\left(\frac{2n+1}{12}\pi\right).\end{aligned}$$

故

$$s_n=\frac{\cos\frac{\pi}{12}-\cos\left(\frac{2n+1}{12}\pi\right)}{2\sin\frac{\pi}{12}}.$$

由于极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\frac{2n+1}{12}\pi\right)$ 不存在，所以极限 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 不存在，故原级数发散.

**评注**：本题利用级数收敛的必要条件判别更简便．一般地，若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 容易求，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则可由此判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；但若 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛，也可能发散，需用其他方法判别.

**【例 3】** 判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；　　（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

分析：判断正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 敛散性的一般顺序是：

（1）首先考察必要条件 $u_n\to 0$ 是否满足，若不是，则级数发散；若是，则进行下一步.

（2）观察级数是否为 $p$ 级数或几何级数，若不是，则进行下一步.

（3）用比值法或根值法进行判别，若失效，则进行下一步.

（4）用比较审敛法或其极限形式进行判别，难点在于选取比较级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$．若用极限形式的比较审敛法，应注意利用通项 $u_n$ 的特点选其等价无穷小作为 $v_n$，此时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散.

许多场合下比值法、根值法或比较审敛法这三种审敛法都是适用的.

**解**：（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$，不满足级数收敛的必要条件，所以级数发散.

（2）由于 $\frac{2+(-1)^n}{2^n}\leqslant\frac{3}{2^n}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 是收敛的几何级数，所以由级数的性质及比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

（3）因 $u_n=\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 也发散.

**【例 4】** 判别下列级数的敛散性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$；　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}$；　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　（6）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$.

**解**：（1）一般项可经过放缩处理，化成 $p$ 级数，故选用比较法或极限审敛法，也可利用拆项法求解.

方法 1　因为 $u_n=\dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}<\dfrac{1}{n^3}$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$ 收敛，由比较审敛法知，原级数收敛.

方法 2　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n^3u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{n^3+3n^2+2n}=1$，由极限审敛法，知原级数收敛.

方法 3　因为

$$u_n=\frac{1}{n^3+3n^2+2n}=\frac{n+2-n}{2n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3+3k^2+2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{4}$，故原级数收敛且其和为 $\dfrac{1}{4}$.

（2）一般项 $u_n=\dfrac{(n!)^2}{2n^2}$ 出现了阶乘形式，选用比值法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)!\right]^2/2(n+1)^2}{(n!)^2/2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)^2}{(n+1)^2}=\infty,$$

所以原级数发散.

（3）一般项 $u_n=\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 含有 $n$ 次幂形式，采用根值法. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}(1+\frac{1}{n})^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}(1+\frac{1}{n})^n=\frac{\mathrm{e}}{3}<1,$$

所以原级数收敛.

（4）注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}=1$，用极限审敛法. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}=1$，所以级数发散.

（5）由级数的特点应该先将积分算出，转化成一般正项级数再进行判别. 但积分不易求出时，可考虑适当放大被积函数，用定积分性质对定积分进行估值后用比较审敛法进行判别. 事实上

$$0 < u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3n^{3/2}} < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

而 $p>1$ 的 $p$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，故由比较审敛法知原级数收敛.

（6）一般项 $u_n = \dfrac{1}{n(1+\ln^2 n)}$，用比值法、根值法、比较法都不易判定级数的敛散性，注意到 $\{u_n\}$ 是单减数列，考察积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)}$，因为广义积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+\ln^2 x)} = \int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\ln x}{1+\ln^2 x} = \arctan(\ln x)\Big|_2^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(\ln 2)$$

收敛，所以原级数收敛.

**评注**：判别正项级数收敛性的一般方法是：若所给级数从某项以后的项可经缩小与放大处理后化成 $p$ 级数或几何级数形式，则用 $p$ 级数或几何级数作为比较标准，利用比较审敛法；若所给级数的一般项含有阶乘形式或 $n$ 次幂形式，判别其收敛性时利用比值审敛法；若所给级数的一般项只含有 $n$ 次幂，利用根值审敛法. 对有些正项级数，若用上述三种方法不易判别其收敛性时，可将 $u_n = f(n)$ 看成 $f(x)$. 若 $f(x)$ 满足在 $x\geq 1$ 时为非负不增函数，且广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛（或发散），则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛（或发散）.

同时还需注意：

① 对正项级数判别收敛法，通常是先用比值法或根值法，当用比值法或根值法极限不易求出或极限为 1 时，再试用比较审敛法. 使用比较审敛法时，关键是对级数的一般项进行放缩，几何级数与 $p$ 级数通常被用作比较标准. 当利用极限审敛法时，可选用一般项的等价无穷小或同阶无穷小作为比较级数的一般项，并注意利用求函数极限的洛必达法则.

② 能用比值法判别收敛性的级数一定可用根值法判别收敛性，因为可以证明当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$，反之不一定成立.

**【例 5】** 判别下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}\quad (a>0)$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}\quad (a>0)$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n\to\infty)$，$a_n, b, a$ 均为正数.

**解**：（1）当 $a=1$ 时，$\dfrac{1}{1+a^n} = \dfrac{1}{2}$，级数发散；

当 $a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n} = 1$，级数发散；

当 $a>1$ 时，$\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a^n}$ 是公比 $q=\dfrac{1}{a}<1$ 的等比级数，收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 收敛.

综上，$a\leqslant 1$ 时级数发散；$a>1$ 时级数收敛.

（2）由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\dfrac{a}{\mathrm{e}}$，

所以由比值审敛法，当 $0<a<\mathrm{e}$ 时，级数收敛；当 $a>\mathrm{e}$ 时，级数发散；当 $a=\mathrm{e}$ 时不能由比值法判定，但注意到此时 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$，而数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调增加趋于 $\mathrm{e}$，所以 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，即 $\{u_n\}$ 单调增加且 $u_1=\mathrm{e}$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$. 故当 $a=\mathrm{e}$ 时级数发散.

（3）由根值法 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{a_n}=\dfrac{b}{a}$.

当 $\dfrac{b}{a}<1$ 即 $b<a$ 时，级数收敛；当 $\dfrac{b}{a}>1$ 即 $b>a$ 时，级数发散；当 $\dfrac{b}{a}=1$ 即 $b=a$ 时，考虑 $a_n=b\sqrt[n]{n}$ 和 $a_n=b\sqrt[n]{n^2}$ 这两种情形可知，级数可能收敛也可能发散.

**评注**：对含参数的正项级数进行收敛性讨论时，注意根据级数特征选择适当的审敛法，全面考虑参数对收敛性的影响.

**【例 6】** 判别下列级数是否收敛，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}\ (p>0)$；

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\dfrac{n+1}{n}$；　　（4）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\cos n\pi\sin\dfrac{\pi}{n}$.

分析：对交错级数先考察其绝对值级数是否收敛. 若收敛，原级数为绝对收敛；若发散，再验证莱布尼茨定理条件是否满足，若满足，则原级数条件收敛.

**解**：（1）$\left|(-1)^n\ln\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}\right|=\ln\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，设 $u_n=\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}}{\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

由比值审敛法，绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$ 收敛，所以原级数绝对收敛.

（2）由 $\left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}\right|=\dfrac{1}{n^p}$，易见当 $p>1$ 时，由 $p$ 级数性质知原级数收敛且绝对收敛；

当 $0<p\leqslant 1$ 时，由莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散，故原级数条件收敛.

（3）$\left|(-1)^n \ln\dfrac{n+1}{n}\right| = \ln\dfrac{n+1}{n}$，对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$，其部分和

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left[\ln(k+1)-\ln k\right] = \ln(n+1)-\ln 1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$，从而绝对值级数发散.

对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\dfrac{n+1}{n}$，设 $u_n = \ln\dfrac{n+1}{n}$，因为

$$u_n - u_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n+1} = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} > 0,$$

所以 $\{u_n\}$ 是单调递减数列，又 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\ln\dfrac{n+1}{n} = 0$，由莱布尼茨审敛法，原级数收敛且为条件收敛.

（4）注意到 $\cos n\pi = (-1)^n$，原级数化为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$，故原级数为交错级数. 对正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}} = 1$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\pi}{n}$ 发散，由极限审敛法，绝对值级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}$ 发散.

对级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{n}$，设 $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n}$，因为 $u_n - u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n} - \sin\dfrac{\pi}{n+1} > 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n} = 0$，由莱布尼茨审敛法，原级数收敛且为条件收敛.

**评注：**判别交错级数的收敛性时应先判别其是否绝对收敛，若否再判别是否条件收敛，为此需验证莱布尼茨审敛法的两个条件：验证 $u_n \geqslant u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$ 时，可用比值 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$；差值 $u_n - u_{n+1} \geqslant 0$；或将 $u_n = f(n)$ 看成 $f(x)$，讨论 $f(x)$ 在 $x \geqslant 1$ 上单调不增；②验证 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 时，若极限不容易求，则先求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$，再由 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 进行验证.

莱布尼茨审敛法的条件是充分条件而非必要条件，条件②是任意项级数收敛的必要条件，当然也是交错级数收敛的必要条件. 条件①不是必要条件，它和条件②一起构成交错级数收敛的一个充分条件. 若条件①不满足，交错级数仍可能收敛，但需用其他方法判别.

对任意项级数判断收敛性，先将各项取绝对值，考察其绝对值级数的收敛性，即正项级数的收敛性. 若绝对值级数发散，不能断言原级数也发散. 但如果利用比值法或根值法判断知绝对值级数发散，则可断定原级数发散，这是因为此时必有 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| \neq 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

**【例 7】** 判别下列级数的收敛性：

（1）$1-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\cdots$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\cos na}{2^n}\ (a>0)$.

**解**:（1）这是任意项级数，其绝对值级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 根据级数的规律，每三项加一括号，考察加括号后级数的敛散性，因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n^2}{n(n+1)(n+2)},$$

令$u_n=\frac{n^2-2}{n(n+1)(n+2)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2-2)}{n(n+1)(n+2)}=1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，从而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-n^2}{n(n+1)(n+2)}$发散. 相对于原级数，加括号后的级数发散，由级数的性质可知，原级数必发散.

（2）将一般项放大处理，考察以放大后的项作为一般项的级数的敛散性，因为$\left|\frac{n\cos na}{2^n}\right|\leqslant\frac{n}{2^n}$，对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$，令$u_n=\frac{n}{2^n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1,$$

由比值法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$收敛，所以由比较法知绝对值级数收敛，从而原级数绝对收敛.

**评注**：对任意项级数先取绝对值，判断绝对值级数的敛散性，因为绝对值级数是正项级数，所以可以用只适用于正项级数的比较审敛法和比值判别法来判断，若收敛即为绝对收敛，若发散再看是否为交错级数，若是交错级数再用莱布尼茨审敛法判断其敛散性.

当然，不论判断何类级数，都先用收敛的必要条件来判断是否发散，当判断不出时，再考虑用其他方法.

**【例 8】**（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$；　（2）求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$.

证明：（1）由级数收敛的必要条件知，当级数收敛时，一般项趋于零. 故若把该数列看成级数的一般项，考察正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$，若该级数收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. 为此设$u_n=\frac{n!}{n^n}$是正项级数的一般项，用比值法判别级数的敛散性. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛，故$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

（2）分子是一个和式的极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$，注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，问题归结为讨论正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 的敛散性.

设 $u_n=\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，显然 $u_n>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}=\frac{\mathrm{e}}{3}<1$，所以由根值法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，故部分和数列 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ 有界. 又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$，所以由无穷小的性质，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{s_n}{n}=0$.

**评注：**本例演示了数项级数的收敛性在数列极限中的应用. 利用级数收敛的必要条件，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；收敛级数的部分和数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}u_k\right\}$ 收敛必有界.

**【例 9】** 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 也收敛.

分析：因为 $u_n\geqslant 0$，$v_n\geqslant 0$，所以 $u_nv_n\geqslant 0$，且 $(u_n+v_n)^2=u_n^2+2u_nv_n+v_n^2\geqslant 0$. 又已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛，由不等式 $2u_nv_n\leqslant u_n^2+v_n^2$ 与比较审敛法即可推得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 收敛，从而结论得证.

证明：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，由极限定义，对正数 $\varepsilon=1$，存在 $N$，使当 $n>N$ 时，有 $0<u_n<1$，从而 $u_n^2<u_n$，由比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，同理可证级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛.

又因为 $2u_nv_n\leqslant u_n^2+v_n^2$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 收敛，由比较法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+2u_nv_n+v_n^2)$ 收敛.

**【例 10】** 若 $\{u_n\}$ 为单调递减数列，且 $u_n\geqslant 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n\cdot u_{n+1}}$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证明：由 $\{u_n\}$ 为单调递减数列可知：$u_{n+1}\leqslant u_n, {u_{n+1}}^2\leqslant u_n\cdot u_{n+1}$，所以 $u_{n+1}\leqslant\sqrt{u_n\cdot u_{n+1}}$.

又已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_n\cdot u_{n+1}}$ 收敛，则由正项级数的比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必是收敛的.

**【例 11】** 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

分析：由已知条件可得 $f(0)=0$， $f'(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，所以可以利用 $f(x)$ 在 $x=0$ 的一阶泰勒公式求证.

证明：$f(x)$ 在 $|x|<\delta$（$\delta$ 为某正数）内具有二阶连续导数，则在 $(-\delta,\delta)$ 内利用一阶泰勒公式，有 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\theta x)}{2!}x^2\ (0<\theta<1)$，取 $0<a<\delta$，则在 $[-a,a]$ 上有 $|f''(x)|\leqslant M$.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得 $f(0)=f'(0)=0$，故 $f(x)=\dfrac{f''(\theta x)}{2!}x^2$，从而

$$|f(x)|\leqslant\frac{|f''(\theta x)|}{2!}x^2\leqslant\frac{M}{2}x^2.$$

取 $x=\dfrac{1}{n}$，则存在正整数 $N$，使当 $n>N$ 时，$\dfrac{1}{n}<a$ 成立，于是 $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\dfrac{M}{n^2}$，因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{2n^2}$ 收敛，由性质与比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

评注：比较审敛法是正项级数收敛性证明中常用的方法. 证明中选择收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 作为比较对象，使得 $u_n\leqslant v_n$，则可得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

**【例 12】** 设 $a_n>0$，$s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots)$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^2}$ 收敛.

分析：正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，故只需要证明 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{s_k^2}$ 有界.

证明：因为 $s_n=s_{n-1}+a_n>s_{n-1}$，故

$$0<\frac{a_n}{s_n^2}\leqslant\frac{a_n}{s_ns_{n-1}}=\frac{s_n-s_{n-1}}{s_ns_{n-1}}=\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right)\qquad(n\geqslant 2),$$

而

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{a_n}{s_n^2}=\frac{1}{a_1}+\frac{a_2}{s_2^2}+\cdots+\frac{a_n}{s_n^2}\leqslant\frac{1}{a_1}+\left(\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_2}\right)+\left(\frac{1}{s_2}-\frac{1}{s_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{s_{n-1}}-\frac{1}{s_n}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{s_1}-\frac{1}{s_n}\leqslant\frac{2}{a_1},$$

即部分和数列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{s_k^2}\right\}$ 有界，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{s_n^2}$ 收敛.

评注：正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，这一充要条件在证明中经常使用.

## 12.1.4　释疑解难

1．判别正项级数的收敛性时，如何选择判别法？

答：判别正项级数的收敛性有许多方法. 选择的原则是先简后繁，即先看一般项 $u_n$ 是否趋于 0，若 $u_n$ 不趋于 0，则级数发散；若 $u_n$ 趋于 0，则敛散性不能确定.

然后再根据所给级数的特点考虑使用比值法或根值法判别．在使用比值法或根值法时如果极限不易求出或极限为 1，可试用比较审敛法或其极限形式．

最后再试用其他方法或按定义判别．

正项级数收敛的充要条件是其部分和数列有界，这一充要条件在证明中经常用到．

2．由正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，是否可以断定 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}$ 收敛？反之呢？

答：可以．

因为 $0 \leqslant \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$，且由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛可知：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$ 也收敛．

所以由正项级数的比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}}$ 收敛．

反之，不一定成立．如：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 0 + 1 + 0 + \cdots$，$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n \cdot u_{n+1}} = 0$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散．

3．如果已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛（或均发散），且 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$，是否可以由比较法判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 同时敛散？

答：不正确．比较法仅对正项级数成立，此处的三个级数为任意项级数，故上述结论在 $a_n \geqslant 0$ 时成立．正确的说法是：

（1）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 收敛，因为 $0 \leqslant b_n - a_n \leqslant c_n - a_n$，所以由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛．又 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$，所以由性质知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛．

（2）若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性不确定．如对 $a_n = -1$，$b_n = 0$，$c_n = 1$，虽然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛．对 $a_n = \frac{1}{3n}$，$b_n = \frac{1}{2n}$，$c_n = \frac{1}{n}$，有 $a_n < b_n < c_n$，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散．

4．设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推得 $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ 收敛?反之是否成立?

答：正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，可以推得 $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ 收敛．这是因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{{u_n}^2}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} {u_n}^2$ 收敛．

反之不成立．例如：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散．

5．设有两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ ，如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l\neq 0$，那么它们是否具有相同的收敛性？

答：不一定.

此种判定法则只适用于正项级数，对于一般级数就不一定成立了．如：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 收敛，令 $v_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$ ，则有 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ ，但 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是发散的，它们的敛散性就不相同.

6．设 $a_n>0$，$b_n>0$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，$(n=1,2,3,\cdots)$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

有人作出证明如下：

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}<1$，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，由比值审敛法知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．上述证明对吗？

答：不正确.

因为比值判别法中的条件是结论成立的充分条件，而非必要的，即：

由对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 而言，$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\rho<1$，可以断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的，但由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛不能断定 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\rho<1$.

正确做法应为：已知 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$，可得 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}\leqslant\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\frac{a_1}{b_1}$，所以 $a_n\leqslant\frac{a_1}{b_1}\cdot b_n$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛及正项级数的比较审敛法易知：$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

7．如果关于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n-(-1)^n}$ 敛散性的判定，作如下解答：

这里 $u_n=2^{-n-(-1)^n}$，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-(n+1)-(-1)^{n+1}}}{2^{-n-(-1)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{1+(-1)^{n+1}-(-1)^n}}=\begin{cases}2, & n\text{ 为偶数}\\ 1/8, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在，故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

是否正确？

答：不正确．正确的说法是：

因为 $u_n=2^{-n-(-1)^n}$ 且 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{-n-(-1)^n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{-n-(-1)^n}{n}}=\frac{1}{2}<1$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛．这里必须注意：正项级数的比值法中 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho<1$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件，不是必要条件，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 不存在时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 未必发散，这里比值法失效，鉴于该级数的特点，用根值法判别.

8．对任意项级数能否用比值审敛法或根值审敛法判别其收敛性?

答：比值法和根值法仅对正项级数成立，不适用于任意项级数，对任意项级数有如下结论：设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为任意项级数且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$（或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$），则当 $\rho<1$ 时级数绝对收敛，当 $\rho>1$ 时级数发散.

## 12.1.5　部分习题解答

【习题 12-1】

3．根据级数收敛与发散的定义判定下列级数的收敛性：

（2）$\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ \cdots\ +\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$；

（3）$\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$.

解：（2）因为

$$\begin{aligned}s_n&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2},$$

所以这级数收敛，它的和是 $\dfrac{1}{2}$.

提示：$u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$.

（3）级数的一般项 $u_n=\sin\dfrac{n\pi}{6}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，由收敛的必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 知级数发散.

【习题 12-2】

1．用比较审敛法或极限形式的比较审敛法判定下列级数的收敛性：

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$；　　　　（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

解：（2）因为 $u_n=\dfrac{1+n}{1+n^2}>\dfrac{1+n}{n+n^2}=\dfrac{1}{n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，由比较审敛法得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+n}{1+n^2}$ 发散.

（4）解法 1　由于 $0<\sin\frac{\pi}{2^n}\leqslant\frac{\pi}{2^n}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，根据正项级数的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

或者解法 2 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^n}}=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛，根据极限形式的比较审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$ 收敛.

2.（4）用比值审敛法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$ 的收敛性.

**解**：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}<1$，所以该级数收敛.

3.（3）用根值审敛法判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$ 的收敛性.

**解**：
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{n}{3n-1}\right)\right]$$
$$=e^{2\ln\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}<1,$$
所以该级数收敛.

4．判定下列级数的收敛性：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{na+b}$　$(a>0,b>0)$.

**解**：（1）级数的一般项 $u_n=\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+1}{n}}=1\neq 0$，由收敛的必要条件知级数发散.

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{na+b}=\dfrac{1}{a}>0$，由极限审敛法知级数发散.

5．判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$ 是否收敛？如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛？

**解**：级数的一般项为 $u_n=(-1)^{n+1}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(2^n\right)^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n}\cdot\dfrac{2^n}{n-1}\cdot\dfrac{2^n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2^n}{3}\cdot\dfrac{2^n}{2}\cdot\dfrac{2}{1}=\infty$，所有级数发散.

## 12.1.6　练习题

一、是非判断题（请在正确叙述后打√，错误的打 ×）：

1．若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则极限 $\lim_{n\to\infty}u_n$ 不存在或存在但不为零.（　　）

2．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是其部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.（　　）

3．若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在且不超过 1.（　　）

4．条件收敛的级数一定不是绝对收敛的.（　　）

5．若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.（　　）

二、填空题：

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 $n$ 项部分和为 $\frac{n}{n+1}$，则级数的一般项为 $u_n=$________.

2．若 $u_1=3$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=$________.

3．若 $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n}=2$，则常数 $c=$________.

4．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p}$ 收敛的充要条件是常数 $p\in$________.

5．若常数 $p>1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=S$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^p}=$________.

三、单项选择题：

1．下列级数中发散的是（　　）.

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2(n+1)}}$；　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2^n}$；　C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$；　D．$\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$

2．下列级数中发散的是（　　）.

A．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$；　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$；　C．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$；　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n^2+n+1)^{\frac{n}{2}}}$

3．下列级数中条件收敛的是（　　）.

A．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$；　B．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-3n}{3+4n}\right)^n$；　C．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$；　D．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\ln n}$

4．下列结论中正确的是（　　）.

A．若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛；

B．若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 均发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散；

C．若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|+|b_n|)$ 发散；

D．若 $a_n \geqslant b_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

5．设常数 $\lambda>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+\lambda})$（　　）.

A．条件收敛；　B．绝对收敛；　C．发散；　D．收敛或发散与 $\lambda$ 的取值有关

四、判断级数收敛性 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

五、判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

## 习题答案：

一、1．×；2．×；3．×；4．√；5．√.

二、1．$\frac{1}{n(n+1)}$；2．$-1$；3．$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$；4．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$；5．$(2^{1-p}-1)S$.

三、1．D；2．B；3．C；4．C；5．A.

四、收敛.

五、发散.

## 12.1.7　考研真题

【例 1】（2013 年数一）　设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（　　）.

A．若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛.

B．若 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$.

C．若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在.

D．若存在常数 $p>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

**解**：因为 $p>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}}$ 存在，比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 答案（D）、（A）、（B）是对交错级数收敛性的莱布尼茨审敛法滥用. （A）缺少 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 这个级数收敛的必要条件. 例如取 $a_n = \frac{1}{n}+1$，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 发散，可排除（A）；莱布尼茨审敛法只是交错级数收敛的充分条件，而非必要条件，取级数 $\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots$ 收敛，但不满足 $a_n > a_{n+1}$，可排除（B）.

**【例 2】**（2012 年数二）　设 $a_n > 0$ （$n = 1,2,\cdots$），$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的（　　）.

A．充分必要条件　　B．充分非必要条件

C．必要非充分条件　　D．即非充分的非必要条件

**解**：由于 $a_n > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 为正项级数的前 $n$ 项和，单调不减. 若 $\{s_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，进而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = 0$，即数列 $\{s_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分条件.

反之，若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则数列 $\{s_n\}$ 不一定. 例如，取 $a_n = 1$，则 $\{a_n\}$ 收敛，但 $s_n = n$ 无上界，故选（B）.

**【例 3】**（2012 年数三）　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则（　　）.

A．$0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$　　C．$1 < \alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$　　D．$\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$

**解**：由 $\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}} \sim \dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 绝对收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 收敛，则有 $\alpha - \dfrac{1}{2} > 1$，即 $\alpha > \dfrac{3}{2}$；

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则有 $0 < 2-\alpha \leqslant 1$，即 $1 \leqslant \alpha < 2$.

综上，$\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$，故选（D）.

**【例 4】**（2011 年数三）　设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　）

A．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛

B．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

C．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛

D．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

**解**：取 $u_n = (-1)^n$，可排除（B）；取 $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$，可排除（C）；取 $u_n = 1$，可排除（D）. 故答案（A）.

**【例 5】**（2009 年数一）　设有两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则（　　）

A．当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛　　B．当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C．当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛　　D．当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

**解**：取 $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以可以排除（A）．取 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 收敛，排除（B），（D）．故选（C）．

注解：事实上，因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，所以取 $\varepsilon = 1$，存在 $N > 0$，使得 $n > N$ 时，$|a_n| \leqslant 1$，即有 $a_n^2 b_n^2 \leqslant b_n^2$，又由 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，故由正项级数的比较审敛法得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

**【例 6】**（2006 年数三）　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数（　　）

A．$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.　　B．$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

C．$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.　　D．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

**解**：取 $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，所以可以排除（A）、（B）．取 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散，排除（C）．故选（D）．

# 12.2　幂　级　数

## 12.2.1　基本要求

1．了解函数项级数的收敛域与和函数的概念.

2．掌握幂级数的收敛点、发散点、收敛半径、收敛区间和收敛域的概念；掌握幂级数收敛半径与收敛区间的求法；能熟练地求幂级数的收敛半径；会求幂级数的收敛区间和收敛域.

3．会利用幂级数加减运算、逐项微分与逐项积分的性质求一些简单的幂级数在收敛区间内的和函数.

4．正确理解函数的泰勒级数和麦克劳林级数，掌握一些常见函数的麦克劳林公式，并会利用这些公式将一些简单函数展开成幂级数.

5．了解幂级数在近似计算上的简单应用，了解欧拉公式.

## 12.2.2　基本内容

### 1．函数项级数的概念

如果给定定义在区间 $I$ 上的函数列 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$，则表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots u_n(x)+\cdots$$

称为定义在区间 $I$ 上的函数项级数，$u_n(x)$ 称为通项或一般项.

### 2．函数项级数的收敛域、发散域与和函数

当 $x$ 在区间 $I$ 中取定某个常数 $x_0$ 时，级数即为常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$．如果常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 收敛，则称 $x_0$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一个收敛点；如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$ 发散，则称 $x_0$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的一个发散点．函数项级数的所有收敛点组成的集合称为它的收敛域，所有发散点组成的集合称为它的发散域.

对于收敛域内的任意一个数 $x$，函数项级数为该收敛域内的一个数项级数，于是有一个确定的和 $s$．这样，在收敛域上，函数项级数的和是 $x$ 的函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为函数项级数的和函数，这函数的定义域就是级数的收敛域，即

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots u_n(x)+\cdots,$$

其中 $x$ 是收敛域内的任意一个点.

### 3．幂级数的概念

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

的函数项级数称为 $x$ 的幂级数，其中常数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 称为该幂级数的系数.

### 4．幂级数的收敛性及收敛半径

阿贝尔定理：如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0\ (x_0\neq 0)$ 时收敛，则适合 $|x|<|x_0|$ 的一切 $x$ 使这幂级数绝对收敛．反之，如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散，则适合 $|x|>|x_0|$ 的一切 $x$ 使这幂级数发散.

注：如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必有一个确定的正数 $R$ 存在，使得当 $|x|<R$ 时幂级数绝对收敛；当 $|x|>R$ 时幂级数发散；当 $x=R$ 与 $x=-R$ 时幂级数可能收敛也可能发散．正数 $R$ 叫做幂级数的收敛半径.

如果幂级数的系数满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho,$$

当 $0<\rho<+\infty$ 时，幂级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$；当 $\rho=0$ 时，规定收敛半径为 $R=+\infty$；当 $\rho=+\infty$ 时，规定收敛半径 $R=0$ .

### 5．幂级数的收敛区间、收敛域

（1）收敛区间

如果幂级数的收敛半径为 $R$ ，则称区间 $(-R,R)$ 为幂级数的收敛区间，幂级数在收敛区间内绝对收敛.

（2）收敛域

把收敛区间的端点 $x=\pm R$ 代入幂级数中，判断常数项级数的收敛性后，就可得到幂级数的收敛域.

### 6．幂级数的性质

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=s(x)$ , $x\in(-R_1,R_1)$ , $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sigma(x)$ , $x\in(-R_2,R_2)$ , $R=\min(R_1,R_2)$ ,

（1）幂级数的和函数在收敛区间内连续.

（2）(加法运算）当 $x\in(-R,R)$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n=s(x)\pm\sigma(x) .$$

（3）(逐项微分运算）当 $x\in(-R,R)$ 时，有

$$s'(x)=(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

且收敛半径仍为 $R$ .

（4）(逐项积分运算）当 $x\in(-R,R)$ 时，有

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

且收敛半径仍为 $R$ .

### 7．泰勒级数

（1）泰勒公式

如果函数 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 内具有直至 $n+1$ 阶导数，且 $x_0\in(a,b)$ ，则对任意点 $x\in(a,b)$ ，有 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 $n$ 阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$ 称为 $n$ 阶泰勒公式的余项，当 $x\to x_0$ 时，它是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小，故一般可

写成 $R_n(x)=o(|x-x_0|^n)$．余项 $R_n(x)$ 有多种形式，一种常用的形式为拉格朗日型余项，其表达式为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}\qquad（\xi 在 x_0 与 x 之间）.$$

（2）泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数.

（3）麦克劳林级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n+\cdots$$

称为 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

（4）函数展开成泰勒级数的充要条件

设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某个邻域内有任意阶导数，则函数 $f(x)$ 的泰勒级数在该邻域内收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$（其中 $R_n(x)$ 是泰勒余项）．如果 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可展开成泰勒级数，即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n,$$

称其为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒展开式，也称为 $f(x)$ 关于 $x-x_0$ 的幂级数.

**8．麦克劳林级数**

函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的泰勒级数中，当 $x_0=0$ 时，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}x^n$$

称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林展开式.

常用初等函数的麦克劳林展开式：

① $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n\,!}x^n=1+x+\frac{x^2}{2\,!}+\cdots+\frac{x^n}{n\,!}+\cdots\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

② $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

③ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)\,!}x^{2n}=1-\frac{x^2}{2\,!}+\frac{x^4}{4\,!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\,!}+\cdots\qquad(-\infty<x<+\infty)$.

④ $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\quad(-1<x\leqslant1)$.

⑤ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n\,!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$.

其中 $\alpha$ 为任意实常数.

⑥ $\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \quad (-1<x<1)$ .

## 12.2.3 典型例题

【例 1】 求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ ； （2）$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$ ； （3）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ .

解：（1）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}=\frac{1}{3}$ ，

所以收敛半径 $R=3$ ，收敛区间为 $(-3,3)$ .

当 $x=-3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ ，收敛；

当 $x=3$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ，显然发散.

故级数收敛域为 $[-3,3)$ .

（2）因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}$ ，所以收敛半径 $R=2$ ，

由 $|x+1|<2$ 得，收敛区间为 $(-3,1)$ .

当 $x=-3$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ ，发散，

当 $x=1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}1$ ，发散，

故级数的收敛域为 $(-3,1)$ .

（3）幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 缺少奇次幂项，直接用比值审敛法有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}(2n)!}{(2n+2)!x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

收敛半径 $R=+\infty$ ，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$ .

评注：如果幂级数属于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 形式，其收敛半径可按公式 $\frac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 求得. 若不属于标准形式，缺奇次（或偶次）幂项，则可用比值审敛法求得.

【例 2】 求下列幂级数的收敛半径与收敛区间：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}x^n$ ； （2）$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}x^n$ ； （3）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$ ；

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n^2}$ ； （5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ .

分析：求形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的幂级数的收敛区间，一般是利用公式 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$，先求得收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$，再用数项级数审敛法判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\pm R)^n$ 的收敛性后确定收敛域；求其他形式幂级数的收敛域可用两种方法之一求：一种是通过变量代换将所求幂级数化为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ 形式；另一种是直接用正项级数的比值法或根值法，然后讨论区间端点处的收敛性.

**解**：（1）因为 $a_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}x^n\ (n=1,2,\cdots)$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$ 不存在，用比值法求收敛半径失效，故用根值法. 因为 $\dfrac{1}{2^n}\leqslant\left|\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}\right|\leqslant\dfrac{3}{2^n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{2^n}}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3}{2^n}}=\dfrac{1}{2}$，故 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}\right|}=\dfrac{1}{2}<1$，所以 $R=2$.

当 $x=2$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n]$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}[2+(-1)^n]\neq 0$，此级数发散；同理，当 $x=-2$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[2+(-1)^n](-1)^n$ 发散；所以所求收敛区间为 $(-2,2)$.

（2）因为 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$，用根值法求收敛半径.

由 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n=\mathrm{e}$，得 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当$x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$，因为$u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$，取 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$，则

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\exp\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]\right\}$$

$$=\exp\left[\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)-u}{u^2}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\ \left(令 x=\frac{1}{u}\right),$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\neq 0$，所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ 是发散的；

同理，当 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ 发散；

所以原级数的收敛区间为$\left(-\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

（3）因为 $u_n(x)=\dfrac{n}{2^n}x^{2n}\ (n=1,2,\cdots)$，原级数缺少 $x$ 的奇次幂项，故直接用比值法. 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^n x^{2(n+1)}}{2^{n+1}nx^{2n}}\right|=\frac{x^2}{2},$$

所以 $|x|<\sqrt{2}$ 时原级数收敛，$|x|>\sqrt{2}$ 时原级数发散，故 $R=\sqrt{2}$.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 发散，所以所求收敛区间为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（4）因为 $u_n(x)=\dfrac{(x-3)^{2n}}{n^2}\ (n=1,2,\cdots)$，且缺少 $x-3$ 的奇次幂项，直接用比值法有 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-3)^{2(n+1)}n^2}{(n+1)^2(x-3)^{2n}}\right|=(x-3)^2<1$ 时原级数收敛，所以 $|x-3|<1$，当 $|x-3|>1$ 时原级数发散，从而 $R=1$.

当 $x=2$ 或 $4$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是收敛级数，所以所求收敛区间是 $[2,4]$.

（5）令 $y=x+1$，原级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$，取 $a_n=\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left[3^{n+1}+(-2)^{n+1}\right]n}{\left[3^n+(-2)^n\right](n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]n}{3^n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right](n+1)}\right|=3,$$

所以 $R=\dfrac{1}{3}$.

当 $y=-\dfrac{1}{3}$ 时，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(-\dfrac{1}{3})^n$，易知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 都收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}(-\dfrac{1}{3})^n$ 收敛.

当 $y=\dfrac{1}{3}$ 时，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ 发散.

综上可知，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}y^n$ 的收敛区间为 $\left[-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，由 $y=x+1$ 解不等式 $-\dfrac{1}{3}\leqslant x+1<\dfrac{1}{3}$，得原级数的收敛区间为 $\left[-\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

评注：求幂级数收敛域的一般方法有如下形式：

① 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则该幂级数的收敛半径为

$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0 & \rho=+\infty.\end{cases}$ 绝对收敛区间为 $(-R,R)$，对区间端点 $x=\pm R$，则利用数项级数审敛法另行讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\ (\pm R)^n$ 的收敛性后确定收敛域.

② 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛域是以 $x_0$ 为中心的对称区间，其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 或 $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$ $(0\leqslant R\leqslant+\infty)$，绝对收敛区间为 $|x-x_0|<R$，在收敛区间端点 $x=x_0\pm R$，幂级数是否收敛，需用数项级数判别法判断.

③ 对形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nf^n(x)$（设 $f(x)$ 有反函数）的函数项级数求收敛区间，可用如下方法:

方法 1：设 $f(x)=y$ 化成幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_ny^n$，先求 $y$ 的取值范围，再由 $x=f^{-1}(y)$ 解出 $x$ 的取值范围;

方法 2：直接利用正项级数的比值法或根值法，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}f^{n+1}(x)}{a_nf^n(x)}\right|<1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nf^n(x)|}<1$ 确定 $x$ 的取值范围.

**【例 3】** 利用逐项求导或逐项积分，求下列级数在其收敛区间的和函数

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$；　　（2）$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n(n-1)}$.

**解:**（1）由于幂级数的系数含有幂指数加 1 的因子，所以采用“先积后微”的方法，

设 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x}$，$|x|<1$，于是

$$s(x)=\left[\int_0^x s(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\frac{x}{1-x}\right]'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\quad,\ |x|<1.$$

（2）由于幂级数的系数含有幂指数的因子，所以采用“先微后积”的方法

设 $s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n(n-1)}$，则

$$s'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2(n-1)},\qquad s''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{2}=\frac{1}{2(1-x)},$$

$$s'(x)=\int_0^x s''(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{2(1-x)}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\ln(1-x),$$

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)\right],$$

即
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{2n(n-1)}=\frac{1}{2}\left[x+\ln(1-x)-x\ln(1-x)\right].$$

评注：掌握幂级数在其收敛区间内和函数的求法，首先要熟悉几个常用的初等函数的幂级数展开式，其次还必须分析所给幂级数的特点，找出它与和函数已知的幂级数之间的联系，从而确定出用逐项求导法还是用逐项积分法求所给幂级数的和函数.

【例 4】 求下列幂级数的和函数：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$；　　（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2\frac{x^n}{2^n}$；　　（3）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$.

分析：求幂级数的和函数，需先求其收敛区间，且常常利用已知函数的幂级数展开式及用逐项求导或逐项求积消去一般项的因子 $n^k$（ $k$ 为整数）.

解：（1）因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}}\right|=1$$

且 $x=\pm1$ 时原级数收敛，所以收敛区间为 $[-1,1]$.注意到 $\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ \left(x\in(-1,1)\right)$，需用逐项微分法去掉一般项中分母的系数.

令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$，则 $s(0)=0$，当 $x\neq0$ 时

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n-1}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

再令 $s_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，则 $s_1'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$，$s_1(0)=0$，所以

$$s_1(x)=\int_0^x s_1'(x)\mathrm{d}x+s_1(0)=\int_0^x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=-x-\ln(1-x)\qquad(x\neq1),$$

故
$$s_1'(x)=\frac{1}{x^2}s_1(x)=-\frac{1}{x}-\frac{\ln(1-x)}{x^2}\qquad(x\neq0,x\neq1)$$

$$s(x)=\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x+s(0)=\int_0^x\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right)\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{x}\left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\ln(1-x)\right]\mathrm{d}x=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x),$$

$$s(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1;$$

所以
$$s(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 1, & x=1,\\ 1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x), & -1\leqslant x<1\text{且}x\neq 0.\end{cases}$$

（2）易知收敛区间为$(-2,2)$，令$y=\dfrac{x}{2}$，则$s(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2y^n=ys_1(y)$，其中$s(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2y^n=ys_1(y)$

$$\int_0^y s_1(y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2\int_0^y y^{n-1}\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}ny^n$$
$$=y\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}ny^{n-1}=ys_2(y),$$

其中$s_2(y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}ny^{n-1}$.

$$\int_0^y s_2(y)\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\int_0^y y^{n-1}\mathrm{d}y=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}y^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-y)^n=-\left(\frac{1}{1+y}-1\right).$$

所以
$$s_2(y)=\frac{1}{(1+y)^2},\quad s_1(y)=\left[\frac{y}{(1+y)^2}\right]'=\frac{1-y}{(1+y)^3},$$
$$s(y)=ys_1(y)=\frac{y(1-y)}{(1+y)^3},\qquad s\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{2x(2-x)}{(2+x)^3},$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2\frac{x^n}{2^n}=\frac{2x(2-x)}{(2+x)^3}\quad(|x|<2).$$

（3）一般项系数为阶乘项，且$a_n=\dfrac{1}{(2n)!}>0$，因此应与$e^x$的展开式联系起来. 又一般项只有偶次幂项，采用逐项求导出现奇次幂项，考虑进行代数运算. 因为
$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n)!x^{2n+2}}{(2n+2)!x^{2n}}\right|=0$$
所以$R=+\infty$，收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

令$s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}$，则$s'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$

$$s(x)+s'(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x,$$
$$s(x)-s'(x)=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=\mathrm{e}^{-x},$$

两式相加得 $s(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，故$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n}=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

**【例 5】** 求下列级数的和

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；　　（2）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}$.

**解：**（1）方法 1　考察幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}$，易知收敛区间为$(-\infty,+\infty)$，由

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^x\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x\right]'=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}\right]'$$

$$=\left[x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right]'=(x\mathrm{e}^x)'=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x$$

得$s(1)=2\mathrm{e}$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=2\mathrm{e}$.

方法 2　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1+1}{(n-1)!}$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=2\mathrm{e}.$$

（2）方法 1　考察幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，易知收敛区间为$(-\infty,+\infty)$，由

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\int_0^x\frac{2n+2}{(2n+1)!}x^{2n+1}\mathrm{d}x\right]'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}\right]'=\frac{1}{2}\left[x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]'$$

$$=\frac{1}{2}(x\sin x)'=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$$

得$s(1)=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1)$，从而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1)$.

方法 2　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1+1)}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$

$$=\frac{1}{2}(\sin 1+\cos 1).$$

**评注：**利用幂级数可求收敛的常数项级数的和，关键是根据数项级数一般项的特点选择一个恰当的幂级数．一般若$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s$，则考察幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n$，求得$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_nx^n$，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=s(1)=s$；也可利用常用的幂级数展开式直接求和.

【例 6】 将下列函数展开成 $x$ 的幂级数

（1） $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+3x+2}$；　　（2） $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

（3） $f(x)=\int_0^x \sin t^2 \mathrm{d}t \quad (x\geqslant 0)$.

**解**：（1） $f(x)$ 是有理函数，应将其化为幂函数与部分分式乘积的形式，再利用相应公式展开.

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{x^2}{x^2+3x+2}=x^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\\ &=x^2\left[\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2\left(1+\dfrac{x}{2}\right)}\right]=x^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]\\ &=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n+2}, \end{aligned}$$

易知收敛区间为 $x\in(-1,1)$.

（2）先对 $f(x)$ 求导，得 $f'(x)=\left[\ln(x+\sqrt{1+x^2})\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，利用 $(1+x)^m$ 的展开式展开 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$，再对展开式逐项积分求解. 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\times 3}{2\times 4}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots\\ &=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in[-1,1], \end{aligned}$$

所以
$$\text{原式}=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1]$$

（3）因为
$$\begin{aligned} \sin t^2&=t^2-\frac{1}{3!}t^6+\frac{1}{5!}t^{10}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}t^{4n+2}+\cdots\\ &=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}t^{4n+2},\quad t\in(-\infty,+\infty), \end{aligned}$$

所以

$$f(x)=\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}t^{4n+2}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)},\quad x\in[0,+\infty).$$

【例 7】 把下列函数展开为 $(x-x_0)$ 的幂级数

（1） $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，　$x_0=-4$；　　（2） $f(x)=\dfrac{3x}{2-x-x^2}$，　$x_0=0$.

**解**：（1）利用等比级数求和公式

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+4-3}=-\frac{1}{3\left(1-\dfrac{x+4}{3}\right)},$$

因为 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\ (-1<x<1)$，所以 $\dfrac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x+4}{3}\right)^n$，

其中 $-1<\dfrac{x+4}{3}<1$，得 $-7<x<-1$，于是

$$\frac{1}{x+1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{3^{n+1}}\qquad(-7<x<-1).$$

（2）
$$\frac{3x}{2-x-x^2}=\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x}==\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+\dfrac{x}{2}}$$

$$=(1+x+\cdots x^n+\cdots)-\left[1+\left(-\frac{x}{2}\right)+\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\cdots\left(-\frac{x}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{8}x^3+\frac{15}{16}x^4+\cdots\quad(-1<x<1).$$

由 $\dfrac{1}{1-x}$ 的收敛区间为 $(-1,1)$，可知 $\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}}$ 的幂级数收敛区间为 $(-2,2)$，$\dfrac{3x}{2-x-x^2}$ 的麦克劳林级数的收敛区间取 $(-1,1)$ 与 $(-2,2)$ 的交集，即 $(-1,1)$.

**评注**：把函数 $f(x)$ 展开为 $(x-x_0)$ 的幂级数的方法有直接法与间接法两种，具体方法和步骤如下：

**直接展开法**：展开步骤如下：

① 求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$.

② 计算 $f(x_0),f'(x_0),f''(x_0),\cdots,f^{(n)}(x_0),\cdots$.

③ 写出幂级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

并求收敛区间.

④ 写出 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\ (0<\theta<1)$，并讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)$.

⑤ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$，则 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，并写出收敛区间.

**间接展开法**：利用几个常用函数的麦克劳林展式，根据函数幂级数展开式的唯一性，通过适当的变量代换、四则运算、复合运算、微分及积分运算，将函数展成幂级数.

直接展开法方法计算量大，$f^{(n)}(x)$ 的一般表达式不易求出，并且讨论余项 $R_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时是否趋于 0 也困难. 为了避免这些缺点，将函数展开成幂级数一般用间接展开法.

【例 8】 将函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

分析：将 $f(x)$ 化为关于 $x-1$ 形式的函数，再利用 $\ln(1+x)$ 的幂级数展开式求解.

解：$f(x)=\ln\dfrac{x}{1+x}=\ln x-\ln(1+x)$，因为

$$\ln x=\ln(1+x-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n,\quad x\in(0,2],$$

$$\ln(1+x)=\ln 2\left(1+\frac{x-1}{2}\right)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,\quad x\in(-1,3],$$

所以

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(x-1)^n-\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=-\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(x-1)^n,\quad x\in(0,2].$$

## 12.2.4 释疑解难

1．为什么要将函数展开成幂级数?

答：多项式是最简单的非周期函数类，若一个函数 $f(x)$ 可以展开为幂级数，则在展开式的收敛区间内可以用它的部分和多项式来近似原来较复杂的函数 $f(x)$，这在理论和应用上都具有重要意义.

2．如何理解函数 $f(x)$ 可展开成幂级数?

答：为了研究函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近的性态，有时需要将 $f(x)$ 展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数. 当 $f(x)$ 在 $x_0$ 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有各阶导数时，总可以形式地写出 $f(x)$ 的泰勒级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n+\cdots$$

但是只有当 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 在 $n\to\infty$ 时的极限为零，即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ $(x\in U(x_0))$ 时，$f(x)$ 的泰勒级数才在此邻域内收敛且它的和就是 $f(x)$. 此时才说 $f(x)$ 在此区间内可展开成泰勒级数，即

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2\,!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}(x-x_0)^n+\cdots,\quad x\in U(x_0).$$

3．将函数展开成幂级数有哪几种方法?哪种方法简便?

答：将函数展开成幂级数通常有直接法和间接法两种方法.

直接法是首先计算各阶导数，写出函数的泰勒级数，求出它的收敛半径 $R$，然后在区间 $(-R,R)$ 内讨论余项 $R_n(x)$ 是否趋于 0. 这种方法计算量大，而且讨论余项有一定的困难.

间接法则需要熟记几个常用函数的麦克劳林展开式及其收敛区间，再利用幂级数的

四则运算或逐项微分和逐项积分的性质. 这种方法计算量小，并可以避免研究余项的收敛性.

4. 将 $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ 展成 $x$ 的幂级数为 $f(x)=\dfrac{x}{x(1-2/x)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)^n, \left|\dfrac{2}{x}\right|<1$ 即 $|x|>2$. 对吗?

答：不正确. 正确的方法是：

$$f(x)=\frac{x}{-2(1-x/2)}=-\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{-2^{n+1}} \qquad (|x|<2).$$

注意：$x$ 的幂级数是指其幂指数只取非负整数，且 $x$ 可以取零. 上式是以 $\dfrac{1}{x}$ 为幂的函数项级数，不合要求.

## 12.2.5　部分习题解答

【习题 12-3】

1. 求下列幂级数的收敛区间：

（6）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$；　（7）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；　（8）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.

**解:**（6）因为 $u_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，原级数缺少的偶次幂项，故直接用比值法. 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big/(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=x^2,$$

所以 $|x|<1$ 时原级数收敛且绝对收敛，$|x|>1$ 时原级数发散，故 $R=1$.

当 $x=\pm1$ 时，原级数分别为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ 均收敛，所以所求收敛区间为 $[-1,1]$.

（7）令 $y=x^2$，则原幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}y^{n-1}$，直接用比值法有 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\Big/\dfrac{2n-1}{2^n}\right|=\dfrac{1}{2}$，从而 $R=2$ .所以 $-2<y<2$ 即 $0\leqslant x^2<2$，亦即 $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ 时原级数收敛.

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}(2n-1)$ 是发散级数，所以所求收敛区间是 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（8）因为 $u_n(x)=\dfrac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$，令 $y=x-5$，原级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{\sqrt{n}}$，取 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，则

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right|=1, \qquad \text{所以 } R=1.$$

当 $y=-1$ 时，级数变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，它是收敛的；

当 $y=1$ 时，级数变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，它是发散的.

综上可知，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{y^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛区间为 $[-1,1)$，由 $y=x-5$ 解不等式 $-1\le x-5<1$，得原级数的收敛区间为 $[4,6)$.

2．利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数：

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}$；　　（3）$x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots$ .

**解**：（2）因为 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{4n}=\dfrac{x^4}{1-x^4}$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\int_0^x\frac{x^4}{1-x^4}\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{-(1-x^4)+1}{1-x^4}\mathrm{d}x=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\arctan x-x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad(|x|<1).$$

（3）因为 $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\dfrac{1}{1-x^2}$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\int_0^x\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\qquad(|x|<1).$$

【习题 12-4】

1．求函数 $f(x)=\cos x$ 的泰勒级数，并验证它在整个数轴上收敛于这函数.

**解**：因为 $f^{(n)}(x_0)=(\cos x)^{(n)}\Big|_{x=x_0}=\cos\left(x_0+\dfrac{n\pi}{2}\right)$，$(n\in\mathbb{N})$，

所以写出 $\cos x$ 的泰勒级数为

$$\cos x\sim\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2\,!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\pi}{n\,!}(x-x_0)^n+\cdots,$$

而

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\cos\left[x_0+\theta(x-x_0)+\frac{n+1}{2}\pi\right]}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\qquad(0<\theta<1).$$

对于 $x\in\mathbb{R}$，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$，其收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)!}{(n+1)!}\right|=+\infty,$$

故此级数对任意 $x\in\mathbb{R}$ 都收敛，由收敛的必要条件，有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0.$$

用夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(x)|=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ .

从而

$$\cos x=\cos x_0+\cos\left(x_0+\frac{\pi}{2}\right)(x-x_0)+\frac{\cos(x_0+\pi)}{2\ !}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{\pi}{n\ !}(x-x_0)^n+\cdots,\quad (x\in\mathbb{R}).$$

2．将下列函数展开成 $x$ 的幂级数，并求展开式成立的区间：

（2）$\ln(a+x)$，$(a>0)$；　　（3）$a^x$；　　（4）$\sin^2 x$ .

**解**：（2）$\ln(a+x)=\ln\left[a\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\right]=\ln a+\ln\left(1+\dfrac{x}{a}\right)=\ln a+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)a^{n+1}}$ ,

$$（-1<\frac{x}{a}\leqslant 1，即 -a<x\leqslant a）.$$

（3）$a^x=e^{x\ln a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\ln^n a}{n!}x^n$ ，（$-\infty<x\ln a<+\infty$，即 $-\infty<x<+\infty$）.

（4）$\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ ，（$x\in\mathbb{R}$）.

3．（2）将函数 $f(x)=\lg x$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数，并求展开式成立的区间.

**解**：$f(x)=\dfrac{\ln x}{\ln 10}=\dfrac{\ln[1+(x-1)]}{\ln 10}=\dfrac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{\ln 10}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$ ,

其中 $-1<x-1\leqslant 1$，即 $0<x\leqslant 2$ .

6．将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

**解**：$f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{-3+(x+4)}-\dfrac{1}{-2+(x+4)}$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n ,$$

其中 $-1<\dfrac{x+4}{2}<1$，且 $-1<\dfrac{x+4}{3}<1$，即 $-6<x<-2$ 且 $-7<x<-1$ ,

故上述幂级数的收敛区间为 $(-6,-2)$ .

【习题 12-5】

1．利用函数的幂级数展开式求下列各数的近似值：

（1）$\ln 3$（误差不超过 0.0001）；　（3）$\sqrt[9]{522}$（误差不超过 0.00001）.

**解**：（1）第一步，选取级数. 考虑到

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\qquad x\in(-1,1]；$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots,\qquad x\in[-1,1)；$$

将两个级数相减，得

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\right),\qquad x\in(-1,1)$$

显见这个幂级数收敛速度快些.

令 $\frac{1+x}{1-x}=3$，得 $x=\frac{1}{2}$. 由上式得

$$\ln 3=\ln\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+\cdots\right).$$

第二步，确定项数. 因为

$$|r_n|=2\left[\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}+\cdots\right]=2\cdot\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}\left[1+\frac{2n+1}{(2n+3)\cdot 2^2}+\cdots\right]$$

$$<\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right]=\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^{2n}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3(2n+1)2^{2n-2}}.$$

$$|r_5|<\frac{1}{3\cdot 11\cdot 2^8}\approx 0.00012,\quad |r_6|<\frac{1}{3\cdot 13\cdot 2^{10}}\approx 0.000025=2.5\times 10^{-5},$$

故取 $n=6$，截断误差 $|r_6|<10^{-4}$.

第三步，计算各项，求和取值.

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{7\cdot 2^7}+\frac{1}{9\cdot 2^9}+\frac{1}{11\cdot 2^{11}}\right)=1.09858\approx 1.0986.$$

（3）$\sqrt[9]{522}=\sqrt[9]{2^9+10}=2(1+\frac{10}{2^9})^{\frac{1}{9}}$，

因 $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2\,!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n\,!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1),$$

故

$$\sqrt[9]{522}=2\left[1+\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}+\frac{\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{10}{2^9}\right)^2+\cdots+\frac{\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{9}-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{9}-n+1\right)}{n!}\frac{10^n}{2^{9n}}+\cdots\right]$$

上式从第二项起为一交错级数，故有：$|r_n|<u_{n+1}$.

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{10}{2^9}=0.002170;\quad \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{100}{2^{18}}=0.000019;\quad \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{17}{9}\cdot\frac{1000}{2^{27}}<10^{-6}$$

即 $|r_3|<0.00001$，所以取 3 项，并在计算时取 6 位小数，可得

$$\sqrt[9]{522}\approx 2(1+0.002170-0.000019)=2\times 1.002151\approx 2.00430.$$

2.（2）利用被积函数的幂级数展开式求定积分 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 的近似值（误差不超过 0.001）：

**解**：因 $\arctan x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$ ，（ $|x|<1$ ）

所以 $\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{0.5}\left[1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right]\mathrm{d}x$

$$=\left(x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^5}{25}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}+1}{2n+1}+\cdots\right)\Bigg|_0^{0.5}=\frac{1}{2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}-\frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}+\cdots.$$

这是交错级数，$|r_n|<u_{n+1}$ ，计算得

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2^3}\approx 0.0139\ ;\quad \frac{1}{25}\cdot\frac{1}{2^5}\approx 0.0013\ ;\quad \frac{1}{49}\cdot\frac{1}{2^7}\approx 0.0002<10^{-3}\ ;$$

所以取 3 项，并在计算时取四位小数，得

$$\int_0^{0.5}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x\approx 0.5-0.0139+0.0013=0.4874\approx 0.487\ .$$

## 12.2.6 练习题

一、是非判断题（请在正确叙述后打√，错误的打 × ）：

1．幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛点与收敛点之间不可能有发散点. （ ）

2．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 $R$ ，则该幂级数在 $(-R,R)$ 内一定绝对收敛. （ ）

3．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ （ $a_n\neq 0$ ）的收敛半径不为零，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在. （ ）

4．对幂级数逐项求导或积分后，收敛半径与收敛域均保持不变. （ ）

5．若在区间 $(-R,R)$ $(R>0)$ 上函数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ ,则当 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)R^n$ 收敛且 $f(x)$ 在 $x=R$ 处连续时必有 $f(R)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)R^n$ . （ ）

二、填空题：

1．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+1)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-2$ 处发散，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为________.

2．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{n}x^{3n}$ 收敛半径 $R=$________.

3．若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a^{n^2}x^n$ 在整个实轴上收敛，则常数 $a$ 的范围是________.

4．函数 $f(x)=\frac{1}{1+x}$ 的麦克劳林级数为： $f(x)=$________，其中 $x\in$________.

5．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}$ 的和函数为：$S(x)=$________，其中 $x\in$________.

三、选择题：

1．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-2)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=4$ 处（　　）.

A．条件收敛；　　B．绝对收敛；

C．发散；　　D．收敛性不能确定

2．设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=2$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{2n+1}$ 的收敛半径为（　　）.

A．1；　　B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　C．$\sqrt{2}$；　　D．2

3．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ 在 $x=1$ 处收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-1,1)$ 内（　　）.

A．可能在各点均发散；　　B．可能既有发散点又有收敛点；

C．在各点均收敛且可能有条件收敛点；　　D．在各点处均绝对收敛

4．下列各式中错误的是（　　）.

A．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$；　　B．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2$；

C．$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=1$；　　D．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$

5．将函数 $\sin x\cos x$ 展开成 $x$ 的幂级数时，$x^3$ 的系数是（　　）.

A．$-\frac{2}{3}$；　　B．$-\frac{1}{3}$；　　C．$-\frac{1}{6}$；　　D．$-\frac{1}{12}$

四、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ 的和函数 $S(x)$.

五、将函数 $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$ 在 $x=2$ 处展成的幂级数.

六、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n+1}x^{n+1}$ 的和函数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(n+1)2^n}$ 的和.

# 习题答案：

一、1．√；2．√；3．×；4．×；5.√

二、1．$(-1,1]$；2．$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$；3．$|a|<1$；4．$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$，$(-1,1)$；5．$x^2\mathrm{e}^x$，$(-\infty,+\infty)$.

三、1．B；2．C；3．D；4．C；5．A

四、解：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$ 的收敛域为 $(-2,0)$.

记 $t=x+1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$，设其和函数为 $G(t)$，则

$$\int_0^t G(t)\mathrm{d}t=\int_0^t\left(\sum_{n=1}^{\infty}nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}t^n=\frac{t}{1-t},\ t\in(-1,1),$$

从而 $G(t)=\left(\dfrac{t}{1-t}\right)'=\dfrac{1}{(1-t)^2}$，$S(x)=(x+1)G(x+1)=\dfrac{x+1}{x^2}$，　$x\in(-2,0)$.

五、解：易知 $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}=\left(\dfrac{1}{3-x}\right)'$，$\dfrac{1}{3-x}=\dfrac{1}{1-(x-2)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$，$x\in(1,3)$，

从而
$$f(x)=\left(\frac{1}{3-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n(x-2)^{n-1},\quad x\in(1,3).$$

六、解：令 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n-1}{n+1}x^{n+1}$，计算得其收敛域为 $x\in(-1,1)$.

显然 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2}{n+1}x^{n+1}$，记

$$S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n+1},\qquad S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}x^{n+1},$$

易知
$$S_1(x)=-\frac{x}{1+x},$$

$$S_2(0)=0,\ S_2'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^n=-\frac{2}{1+x}$$

从而
$$S_2(x)=S_2(0)+\int_0^x\left(-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=-2\ln(1+x)$$

$$S(x)=-\frac{x}{1+x}-2\ln(1+x)\qquad x\in(-1,1).$$

故得
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{(n+1)2^n}=-2S(\frac{1}{2})=\frac{2}{3}+4(\ln 3-\ln 2).$$

## 12.2.7　考研真题

**【例 1】**（2008 年数一）　已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

**解：**因为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 收敛区间的对称点为 $x=-2$，又由题设可知该级数在 $x=0$ 处

收敛，在 $x=-4$ 处发散，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n2^n$ 收敛，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-2)^n$ 发散，从而幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛域为 $(-2,2]$，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$.

所以应填 $(1,5]$.

**【例 2】**（2011 年数一） 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2\cdots\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-1\right)^n$ 的收敛域为（　　）.

A．$(-1, 1]$　　B．$[-1, 1)$　　C．$[0, 2)$　　D．$(0, 2]$

**解**：本题考查幂级数的收敛域. 主要涉及收敛半径的计算和常数项级数收敛性的一些结论，综合性较强.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2\cdots\cdots)$ 无界，说明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R\leqslant1$；

$\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，由交错级数的莱布尼茨判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 收敛，可知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R\geqslant1$.

因此，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $\left(0,2\right)$. 下面判定此幂级数在区间端点处的收敛性. 由于 $x=0$ 时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$，收敛. 当 $x=2$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$，又因为题设已知 $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 无界，所以幂级数在 $x=2$ 发散. 综上所述，幂级数的收敛域为 $\left[0,2\right)$. 答案：C.

**【例 3】**（2006 年数三） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

**解**：记 $u_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(-1)^nx^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}}{\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}}\right|=\left|x\right|^2.$$

所以当 $\left|x\right|^2<1$,即 $\left|x\right|<1$ 时，所给幂级数收敛；当 $\left|x\right|>1$ 时，所给幂级数发散；

当 $x=\pm1$ 时,所给幂级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)}$ ,均收敛,故所给幂级数的收敛域为 $\left[-1,1\right]$.

在 $(-1,1)$ 内，　$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n-1)\left(2n\right)}=2xs_1(x)$，

而
$$s_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}, s_1''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2},$$

所以 $s_1'(x)-s_1'(0)=\int_0^x s_1''(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=\arctan x$， 又 $s_1'(0)=0$，

于是 $s_1'(x)=\arctan x$．同理

$$s_1(x)-s_1(0)=\int_0^x s_1'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\arctan t\mathrm{d}t$$
$$=t\arctan t\Big|_0^x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

又 $s_1(0)=0$，所以 $s_1(x)=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

故
$$s(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2).\ x\in(-1,1).$$

由于所给幂级数在 $x=\pm1$ 处都收敛，且 $s(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2)$ 在 $x=\pm1$ 处都连续，所以 $s(x)$ 在 $x=\pm1$ 成立，即

$$s(x)=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad x\in[-1,1].$$

【例 4】（2010 年数一） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

**解**：（1）令

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2(n+1)}}{\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2n-1}{2n+1}\right|,\ x^2=x^2<1.$$

所以 $-1<x<1$ 时级数收敛；

当 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，由莱布尼茨审敛法知，此级数收敛，故原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

（2）设
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=xS_1(x),$$

其中
$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad x\in(-1,1),$$

则
$$S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},x\in(-1,1),$$

所以
$$S_1(x)=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+S_1(0)=\arctan x,\quad x\in(-1,1).$$

$S_1(x)$ 在 $x=[-1,1]$ 上是连续的，所以 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且幂级数的和函数为

$$S(x)=x\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

**【例 5】**（2012 年数一） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

**解：**（1）收敛域

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{4(n+1)^2+4(n+1)+3}{2(n+1)+1}\cdot x^{2(n+1)}}{\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}\cdot x^{2n}}\right|=x^2.$$

令 $x^2<1$，得 $-1<x<1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散.所以收敛域为 $(-1,1)$.

（2）设
$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^2+2}{2n+1}x^{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)x^{2n}+\frac{2}{2n+1}x^{2n}\right],\quad (|x|<1)$$

令
$$S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^{2n},\quad S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n},$$

因为
$$\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(2n+1)t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2},(|x|<1)$$

所以
$$S_1(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},(|x|<1).$$

因为
$$xS_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$$

所以
$$[xS_2(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n}=2\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2},(|x|<1).$$

进一步有
$$xS_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|,(|x|<1).$$

当 $x\neq0$ 时，$S_2(x)=\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$；当 $x=0$ 时，$S_1(0)=1$，$S_2(0)=2$，

所以
$$S(x)=S_1(x)+S_2(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ 3, & x=0\end{cases}.$$

**【例 6】**（2013 年数一）设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0\ (n\geqslant2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

（1）证明：$S''(x)-S(x)=0$；

（2）求 $S(x)$ 的表达式.

**解：**（1）设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$，$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$，

$$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0 \Rightarrow S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x).$$

（2）方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，得 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，从而 $S(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$.

又 $a_0=S(0)=3 \Rightarrow C_1+C_2=3$；$a_1=S'(0)=1 \Rightarrow -C_1+C_2=1$，

解得 $C_1=1,C_2=2$，所以 $S(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{x}$.

**【例 7】**（2007 年数三） 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

**解：** $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}=\dfrac{1}{(x-4)(x+1)}=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$，而

$$\frac{1}{x-4}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}},-2<x<4,$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}},-1<x<3,$$

所以
$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right](x-1)^n,$$

收敛区间为 $-1<x<3$.

**【例 8】**（2006 年数一） 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 $x$ 的幂级数.

**解：**
$$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{2}{2-x}\right)$$

而
$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,-1<x<1;\quad \frac{2}{2-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n,-2<x<2;$$

所以
$$f(x)=-\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-2)^n}{3\cdot 2^n}x^n,$$

收敛区间为 $-1<x<1$.

**【例 9】**（2004 年数三）设级数 $\dfrac{x^4}{2\cdot 4}+\dfrac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\dfrac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$ 的和函数为 $S(x)$. 求：

（I）$S(x)$ 所满足的一阶微分方程；

（II）$S(x)$ 的表达式.

**解：**（I）
$$S(x)=\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots,$$

易见
$$S(0)=0,$$

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots\right)=x\left[\frac{x^2}{2}+S(x)\right].$$

因此 $S(x)$ 是初值问题 $y'=xy+\dfrac{x^3}{2}, y(0)=0$ 的解.

（II）方程 $y'=xy+\dfrac{x^3}{2}$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}\left[\int\frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\int x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=-\frac{x^2}{2}-1+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}},$$

由初始条件 $y(0)=0$，得 $C=1$.

故 $y=-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数 $S(x)=-\dfrac{x^2}{2}+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}-1$.

**【例 10】**（2007 年数一） 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

（1）证明：$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$.

（2）求 $y(x)$ 的表达式.

**解：**（1）由题设可得

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n\ ,$$

代入 $y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1$，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,\quad a_0=0,a_1=1,a_2=0$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n-2\sum\limits_{n=0}^{\infty}na_nx^n-4\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$，比较同次项系数可得

$$a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,\quad n=1,2\cdots.$$

（2）由 $a_0=0,a_1=1,a_2=0$，$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2\cdots$ 可得

$$a_{2n}=0, a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\frac{2}{2n}\cdot\frac{2}{(2n-2)}a_{2n-3}=\cdots=\frac{1}{n!}a_1=\frac{1}{n!},$$

故
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x^2)^n=x\mathrm{e}^{x^2}.$$

**【例 11】**（2008 年数三） 设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算.某基金会希望通过存款 $A$ 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，依此类推，第 $n$ 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 $A$ 至少应为多少万元?

**解：**设 $A_n$ 为用于第 $n$ 年提取 $(10+9n)$ 万元的贴现值，则

$$A_n=(1+r)^{-n}(10+9n)$$

故 $$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}(1+r)^{-n}(10+9n)=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{(1+r)^n}=200+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}.$$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n, x\in(-1,1)$，则 $S(x)=x\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$.

所以 $$S\left(\frac{1}{1+r}\right)=S\left(\frac{1}{1.05}\right)=420\text{（万元）}$$

故 $A=200+9\times420=3980$ 万元，即至少应存入 3980 万元.

**【例 12】**（2009 年数一） 设为 $a_n$ 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 所围成区域的面积，记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，求 $S_1$ 与 $S_2$ 的值.

**解**：曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

于是 $$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

考查幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}x^n$，知其收敛域为 $(-1,1]$，和函数为 $-\ln(1+x)$.

因此 $$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x)$$

令 $x=1$ 可得 $S_2=1-\ln2$.

**评注**：本题综合考查了平面图形的面积和数项级数求和.

（1）曲线 $y=f_1(x), y=f_2(x)$ 及直线 $x=a, x=b\ (a<b)$ 所围成的曲边梯形面积为 $S=\int_a^b\left|f_1(x)-f_2(x)\right|\mathrm{d}x$，若在 $[a,b]$ 上，$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，则

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$$

（2）本题求 $S_2$ 时利用了 $\ln(1+x)$ 的麦克劳林展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,\ (-1<x\leqslant1).$$

# 12.3 傅里叶级数

## 12.3.1 基本要求

1. 了解函数展开为傅里叶级数的充分条件，掌握将以 $2\pi$ 为周期的周期函数展开为傅里叶级数的方法.

2．掌握将以 $2l$ 为周期的周期函数展开为傅里叶级数的方法，学会将 $[0,\pi]$ 上函数展开成正弦级数或余弦级数.

## 12.3.2 基本内容

### 1．傅里叶级数的概念

设周期为 $2\pi$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 可积且绝对可积，令

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

则称 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数.

一般地，设周期为 $2l$ 的函数 $f(x)$ 在 $[-l,l]$ 可积且绝对可积，令

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ (n=1,2,3,\cdots),$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$.

### 2．收敛定理（狄利克雷充分条件）

设 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的周期函数，如果它满足：

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点，

（2）在一个周期内至多只有有限个极值点，

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

当 $x$ 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$；

当 $x$ 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x^-)+f(x^+)]$.

### 3．周期延拓

由于傅里叶级数本身具有周期性，所以非周期函数不能展开成傅里叶级数. 如果函数 $f(x)$ 仅在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 有定义，可在定义区间外补充函数 $f(x)$ 的定义，使它拓广成周期为 $2\pi$ 的周期函数 $F(x)$. 按这种方式拓广函数的定义域的过程成为周期延拓. 若 $F(x)$ 满足狄利克雷定理的条件，则可将 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内展开成傅里叶级数. 而 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 上是相等的，从而得到 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数，即将 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 上展成了傅里叶级数.

### 4．正弦级数与余弦级数

① 若 $f(x)$ 为偶函数，则其傅里叶级数是只含有余弦项的余弦级数，即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ , $n=0,1,2,3,\cdots$ ;

② 若 $f(x)$ 为奇函数，则其傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数，即

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

其中 $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$ ， $n=1,2,3,\cdots$ .

## 12.3.3　典型例题

**【例 1】** 设 $f(x)=2-x\ (0\leqslant x<2)$ , $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2}(-\infty<x<+\infty)$ ，其中 $b_n=\int_0^2 f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$ ，求 $s(-1)$ 和 $s(0)$ .

分析：由条件知，$s(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，但求函数值 $s(-1)$ 和 $s(0)$ 时，不需要进行傅里叶展开，而是应用狄利克雷定理判别当 $x=0$ 和 $x=-1$ 时，级数收敛于何值.

**解**：由已知， $s(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的正弦级数的和函数，也是奇函数

$$F(x)=\begin{cases}-2-x, & -2\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 2-x, & 0<x<2\end{cases}$$

在 $[-2,2]$ 上的傅里叶（正弦）级数的和函数. 由狄利克雷定理，

在 $F(x)$ 的连续点 $x=-1$ 处， $s(-1)=F(-1)=-1$ ;

在 $F(x)$ 的间断点 $x=0$ 处， $s(0)=\frac{1}{2}[F(0-0)+F(0+0)]=\frac{1}{2}(-2+2)=0$ .

**评注**：学习傅里叶级数，主要是掌握把满足收敛性定理条件的函数展开成傅里叶级数的方法，会利用函数的奇偶性简化计算，并分清函数图形与其傅里叶级数和函数图形的区别，即在不连续点 $x_0$ ，和函数收敛于 $\frac{f(x_0^{+})+f(x_0^{-})}{2}$ ，而不是 $f(x_0)$ .

**【例 2】** 将 $f(x)=|\sin x|(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成傅里叶级数.

分析：由 $f(x)=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -\sin x, & -\pi\leqslant x<0\end{cases}$ 易知函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且有 3 个极值点，满足狄利克雷收敛定理条件，将 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期作周期延拓后，直接求傅里叶系数.

**解**：将 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期作周期延拓，由 $f(x)$ 为偶函数，得 $b_n=0(n=1,2,\cdots)$ ,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(n+1)x+\sin(1-n)x]\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}\end{aligned}$$

$$=\begin{cases} 0, & n=2k-1, \\ -\dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}, & n=2k, \end{cases} \quad (n\neq 0,1),$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且仅有三个极值点，所以由收敛性定理

$$f(x)=|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

**【例 3】** 将 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成正弦级数.

**解**：对 $f(x)$ 进行奇延拓，延拓成 $(-\pi,\pi]$ 上的奇函数，即

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

再将 $F(x)$ 延拓为周期是 $2\pi$ 的周期函数，则 $a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x-\pi}{2n}\cos nx-\frac{1}{2n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\cdots).$$

因为 $f(0)=\dfrac{\pi}{2}\neq 0$，所以延拓函数在 $x=0$ 不连续．由收敛性定理，有 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ $(0<x\leqslant\pi)$；当 $x=0$ 时，傅里叶级数收敛于 0.

**【例 4】** 将 $f(x)=\begin{cases} 1, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 0, & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$ 分别展成正弦级数和余弦级数.

分析：对 $f(x)$ 进行奇（偶）延拓，延拓成 $(-2,2]$ 上的奇（偶）函数，再延拓为周期是 4 的周期函数后求傅里叶级数.

**解**：先求正弦级数．将 $f(x)$ 作奇延拓，再作周期延拓，则

$$a_n=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sin\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi} \quad (n=1,2,\cdots)$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2},\ x\in(0,1)\cup(1,2),$$

当 $x=0$ 时，级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0\neq f(0)=1$.

再求余弦级数，将 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，则

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),\ a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x=1,$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi} \quad (n=1,2,\cdots)$$

由 $f(x)$ 的连续性，知 $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos\frac{n\pi x}{2}$，$x\in[0,1)\cup(1,2)$.

**评注：**将函数展开成傅里叶级数所用的方法是直接展开法，关键是针对不同的周期掌握各系数 $a_n$、$b_n$ 的计算公式，其展开步骤为：

① 画出 $f(x)$ 的图形，由图形可看出其连续性，奇偶性与收敛域(简单的图形可以不画)，并验证 $f(x)$ 是否满足狄利克雷收敛定理的条件.

② 计算傅里叶系数 $a_n$、$b_n$，关键是正确使用定积分分部积分法，并注意对 $n$ 的讨论.

③ 写出傅里叶级数，并根据收敛性定理确定收敛域.

**还需注意：**算出系数 $a_n$，$b_n$ 并写出 $f(x)$ 的傅里叶级数后，一定要用收敛性定理讨论收敛域，对于连续点与间断点及周期区间的端点，分别给出不同的结论. 由于傅里叶级数本身具有周期性，所以非周期函数不能展开成傅里叶级数.对于仅在 $[0,l)$ 有定义的函数 $f(x)$，在展开前先将其延拓成周期为 $2l$ 的函数 $F(x)$.展成正弦级数时先进行奇延拓，再进行周期延拓；要展成余弦级数则先进行偶延拓，再进行周期延拓.

**【例 5】** 将 $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

分析：为利用傅里叶级数求数项级数的和，应先将函数展开成傅里叶级数，再令 $x$ 取特殊值求和.

**解：**$f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且只有一个极值点，满足狄利克雷收敛定理条件，因为 $f(x)$ 偶函数，对 $f(x)$ 作周期延拓，则

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}\sin nx\\&=\frac{2}{n\pi}\left([x^2\sin nx]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\cos nx\\&=\frac{4}{n^2\pi}\left([x\cos nx]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{4(-1)^n}{n^2},\quad(n=1,2,\cdots),\end{aligned}$$

由收敛性定理可知，

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2},\qquad x\in(-\pi,\pi).$$

当 $x=0$ 时，$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ 即 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$；

当 $x=\pi$ 时，$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n^2}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{12}\right)=\frac{\pi^2}{8}.$$

**评注：**利用函数的傅里叶展式，可以导出一些常数项级数的和.

## 12.3.4 释疑解难

1．为什么要把函数展开成傅里叶级数?

答：周期函数反映了客观世界中的周期运动，为了深入研究周期函数有时需要将它展开成由简单的周期函数——三角函数组成的级数，即展开成傅里叶级数. 从工程技术的角度讲，就是把一个复杂的周期运动分解成许多不同频率的简谐振动的叠加来研究.

2．设函数 $f(x)$ 满足狄利克雷条件，则必有 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中 $a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,3,\cdots$，对吗?

答：不正确. 正确的说法是：

设函数 $f(x)$ 满足狄利克雷条件，则 $f(x)$ 的傅里叶级数必是收敛的，即 $s(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，其中

$$s(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}.$$

3．将 $f(x)=\pi-x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展成正弦级数，作如下解答：

设 $g(x)=x$，先将 $g(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，再延拓为周期为 $2\pi$ 的周期函数，则 $a_n=0\ (n=0,1,2,\cdots)$，

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

故 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin nx$，所以

$$f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\quad(0<x<\pi),$$

当 $x=0,\pi$ 时级数收敛于 $\pi$.

是否正确?

答：不正确. 正确的说法是：

先将 $f(x)$ 延拓成 $[-\pi,\pi]$ 上的奇函数，再延拓为周期为 $2\pi$ 的周期函数，则

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\sin nx\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{n}\cos nx+\frac{\pi}{n}\cos nx-\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

由收敛性，有 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \quad (0<x\leqslant \pi)$.

## 12.3.5　部分习题解答

【习题 12-7】

1.（2）设以 $2\pi$ 为周期的周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$（$-\pi\leqslant x<\pi$），试将其展开成傅里叶级数.

**解：** $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}[\mathrm{e}^{2x}]_{-\pi}^{\pi}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\pi}$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left([\cos nx\cdot\mathrm{e}^{2x}]_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x\right)=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})$$

$$=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}+\frac{n}{4\pi}\left([\sin nx\cdot\mathrm{e}^{2x}]_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{n^2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\cos nx\mathrm{d}x+\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi})}{2\pi}.$$

移项，得

$$a_n=\frac{2(-1)^n}{n^2+4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\qquad(n\in\mathbb{N}).$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{2x}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{n^2+4}(2\sin nx-n\cos nx)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{n(-1)^{n+1}}{n^2+4}\cdot\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi},\quad(n\in\mathbb{N}).$$

因为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上连续，但 $f(-\pi+0)=\mathrm{e}^{-2\pi}\neq f(\pi-0)=\mathrm{e}^{2\pi}$，所以由收敛性定理

$$\mathrm{e}^{2x}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+4}(2\cos nx-n\sin nx)\right],$$

其中 $x\neq(2n+1)\pi,n=0,\pm1,\pm2,\cdots$.

在间断点，级数收敛于 $\frac{\mathrm{e}^{2\pi}+\mathrm{e}^{-2\pi}}{2}$.

6．将 $f(x)=2x^2\ (0\leqslant x\leqslant\pi)$ 分别展成正弦级数和余弦级数.

**解：** 先求正弦级数. 将 $f(x)$ 作奇延拓，再作周期延拓，则

$$a_n=0\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x^2}{n}\mathrm{d}(\cos nx)=-\frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}-2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{4\pi}{n}+\frac{8}{n^2\pi}\left([x\sin nx]_0^\pi+\frac{1}{n}[\cos nx]_0^\pi\right)=(-1)^{n+1}\frac{4\pi}{n}+\frac{8}{n^3\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\qquad(n=1,2,\cdots).$$

所以

$$2x^2=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{n^3}+(-1)^n\left(\frac{2}{n^3}-\frac{\pi^2}{n}\right)\right]\sin nx,\quad x\in[0,\pi);$$

当 $x=\pi$ 时，级数收敛于 $\pi^2$.

再求余弦级数，将 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，则

$$b_n=0\ (n=1,2,\cdots),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}\int_0^\pi\frac{x^2}{n}\mathrm{d}(\sin nx)=\frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{n}\sin nx\right]_0^\pi+2\cdot\frac{1}{n}\int_0^\pi x\mathrm{d}(\cos nx)\right)$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\left([x\cos nx]_0^\pi-\frac{1}{n}[\sin nx]_0^\pi\right)=(-1)^n\frac{8}{n^2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

又 $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2$，所以由 $f(x)$ 的连续性，知

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi].$$

7．设周期函数 $f(x)$ 的周期为 $2\pi$．证明：

（1）如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0$, $a_{2k}=0$, $b_{2k}=0\,(k=1,2,\cdots)$;

（2）如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0$, $b_{2k+1}=0\,(k=0,1,2,\cdots)$.

**证明：**（1）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^\pi -f(x-\pi)\mathrm{d}x\right)$$

第二个积分中，令 $x-\pi=u$，则

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\mathrm{d}u\right)=0.$$

同理可得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^\pi f(x)\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_0^\pi -f(x-\pi)\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right);$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right);$$

当 $n=2k(k\in\mathbb{N}^{+})$ 时，$\cos(n\pi+nu)=\cos nu$，$\sin(n\pi+nu)=\sin nu$，

故 $$a_{2k}=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos 2kx\mathrm{d}x-\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(2ku)\mathrm{d}u\right)=0 \text{ 及 } b_{2k}=0\quad(k\in\mathrm{N}^{+}).$$

（2）与（1）的做法类似，有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\cos(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{0}f(u)\sin(n\pi+nu)\mathrm{d}u\right),$$

当 $n=2k+1(k\in\mathbb{N})$ 时，$\cos(n\pi+nu)=-\cos nu$，$\sin(n\pi+nu)=-\sin nu$，

故 $a_{2k+1}=0$，$b_{2k+1}=0\ (k\in\mathrm{N})$.

【习题 12-8】

2．将函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<\dfrac{l}{2} \\ l-x, & \dfrac{l}{2}\leqslant x\leqslant l \end{cases}$$

展开成正弦级数.

**解**：对 $f(x)$ 进行奇延拓，拓广的周期函数满足狄利克雷充分条件，且在每一点 $x$ 处都连续. 所以拓广的周期函数的傅里叶级数在 $[0,l]$ 上收敛于 $f(x)$.

下面计算傅里叶系数：

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\quad(\text{令}t=l-x)\\
&=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+\int_{\frac{l}{2}}^{0}t\sin\frac{n\pi(l-t)}{l}(-\mathrm{d}t)\right)\\
&=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}}t\sin\frac{n\pi t}{l}\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{2}{l}\left(\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x+(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}[1+(-1)^{n-1}]x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

当 $n=2,4,6,\cdots$ 时，$b_n=0$；

当 $n=1,3,5,\cdots$ 时，

$$b_n=\frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{(-1)^{m-1}4l}{\pi^2(2m-1)^2}\quad(n=2m-1)$$

代入即得函数 $f(x)$ 的正弦级数为

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{l}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{l}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{l}-\cdots\right)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\ (0\leqslant x\leqslant l)$$

## 12.3.6 练习题

一、是非判断题（请在正确叙述后打√，错误的打×）：

1．三角函数系 $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$ 是区间 $[0,2\pi]$ 上的正交系.（　　）

2．一个定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 $f(x)$，只要它可积，则其对应的傅里叶系数一定存在.（　　）

3．以 $2\pi$ 为周期的可积函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数收敛于 $f(x)$.（　　）

4．若 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $f(x)$ 以 $2\pi$ 为周期展开时对应的傅里叶级数就是它自身.（　　）

5．可积函数 $f(x)$ 对应的傅里叶级数的和函数必定是连续函数.（　　）

二、填空题：

1．已知当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时 $x+|x|=\dfrac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $b_3=$________.

2．已知以 $2\pi$ 为周期的函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}x-1, & -\pi\leqslant x<0\\ 2, & 0\leqslant x<\pi\end{cases}$，若将其展成傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，该级数的和函数记为 $S(x)$，则 $S(-\pi)S(7)=$________.

3．将 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$ $(-1\leqslant x<1)$ 展成以 2 为周期傅里叶级数，则该级数的和函数在 $[-1,1)$ 上的表达式 $S(x)=$________.

4．设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上连续，在 $(0,l)$ 内有 $f(x)=\dfrac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x$，则 $a_n$ 的计算公式为________.

5．已知 $f(x)$ 是周期为 $2\pi$ 的连续函数且满足狄利克雷收敛定理条件，对应的傅里叶级数为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 的和函数 $S(x)=$________.

三、选择题：

1．设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，$F(x)=-f(-x)$，$f(x)$ 及 $F(x)$ 对应的傅里叶级数分别为 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 与 $\dfrac{A_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则（　　）.

A．$A_n=a_n$，$B_n=b_n$；　　B．$A_n=-a_n$，$B_n=b_n$；

C．$A_n=a_n$，$B_n=-b_n$；　　D．$A_n=-a_n$，$B_n=-b_n$

2．周期为 $2\pi$ 的周期函数在一个周期内的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi\leqslant x<0,\\ x+1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$ 又设 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数，则下列表达式中错误的是（　　）.

A．$S(0)=\dfrac{1}{2}$；　　B．$S(\pi)=\dfrac{1}{2}+\pi$；

C．$S\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}+1$；　　D．$S\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{3\pi}{2}+1$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}2, 0\leqslant x<\dfrac{1}{2}\\ x^2, \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，记 $c_n=\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,\cdots$，又设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$（　　）.

A．$\dfrac{9}{4}$；　　B．$-\dfrac{9}{4}$；　　C．$\dfrac{9}{8}$；　　D．$-\dfrac{9}{8}$

4．已知 $a_n=\dfrac{2}{\pi}\left[\int_0^1\dfrac{\sin x}{x}\cos nx\mathrm{d}x+\int_1^{\pi}\mathrm{e}^{x^3}\cos nx\mathrm{d}x\right]$（$n=0,1,2,\cdots$），则级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $x=-1$ 处收敛于（　　）.

A．$-\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}+\sin 1)$；　　B．$-(\mathrm{e}+\sin 1)$；　　C．$\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}+\sin 1)$；　　D．$\mathrm{e}+\sin 1$

5．设 $f(x)$ 是以 $2\pi$ 为周期的函数，当 $-\pi\leqslant x<\pi$ 时，$f(x)=x^2+x$，将其展成傅里叶级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则 $a_n=$（　　）.

A．$\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$；　　B．$\dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x^2+x)\cos nx\mathrm{d}x$；

C．$\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x^2+x)\cos nx\mathrm{d}x$；　　D．$\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$

四、已知函数 $f(x)$ 的周期为 2，且当 $-1\leqslant x<1$ 时，$f(x)=2+|x|$. 试将 $f(x)$ 展成傅里叶级数并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

五、证明当 $x\in(0,1)$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x$ 的和为一常数.

## 习题答案：

一、1．√；2．√；3．×；4．√；　5．×；

二、1．$\dfrac{2}{3}$；2．$1-\pi$；3．$\mathrm{e}^{x^2}$ $(-1\leqslant x<1)$；4．$a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x$；5．$\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$；

三、1．B；2．D；3．D；4．C；5．A

四、$f(x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

五、证：若为常数 $c$，则必有 $2\int_0^1 c\sin\pi x\mathrm{d}x = b_1 = 1$，解得 $c=\dfrac{\pi}{4}$.

将 $f(x)=\dfrac{\pi}{4}$，$x\in(0,1)$ 展成正弦级数，得 $b_n = 2\int_0^1 \dfrac{\pi}{4}\sin n\pi x\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2n}[1-(-1)^n]$

当 $n$ 为偶数时，$b_n=0$；当 $n$ 为奇数时，$b_n=\dfrac{1}{n}$.

根据狄利克雷收敛定理知，当 $x\in(0,1)$ 时，$\dfrac{\pi}{4}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin(2n-1)\pi x$.

## 12.3.7　考研真题

**【例 1】**（2003 年数一）　设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则 $a_2$ ＝ ________ .

**解：** $a_2$ 是偶函数 $x^2$ 的周期为 $2\pi$ 的傅里叶级数中对应于 $\cos 2x$ 的系数，故

$$a_2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left([x^2\sin 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin 2x\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{\pi}\left([x\cos 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\right)=1.$$

所以答案填 1.

**【例 2】**（2013 年数一）　设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\mathrm{d}x$（$n=1,2,\cdots$），令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=$（　　）.

A. $\dfrac{3}{4}$；　　B. $\dfrac{1}{4}$；　　C. $-\dfrac{1}{4}$；　　D. $-\dfrac{3}{4}$

**解：** 将函数在 $[-1,1]$ 上展开成傅里叶级数，$f(x)=\begin{cases}\left|x-\dfrac{1}{2}\right|, & x\in(0,1)\\ -\left|x-\dfrac{1}{2}\right|, & x\in(-1,0)\end{cases}$，它的傅里叶级数和函数为 $S(x)$，周期为 2，则当 $x\in(-1,1)$ 且 $f(x)$ 在 $x$ 处连续时，$S(x)=f(x)$，

$S\left(-\dfrac{9}{4}\right)=S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-S\left(\dfrac{1}{4}\right)=-f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{4}$，所以答案选(C).

**【例 3】**（2008 年数一）　$f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant\pi)$，用余弦级数展开，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

**解：** 将 $f(x)$ 作偶延拓，再作周期延拓，则

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-x^2}{n}\mathrm{d}(\sin nx)=\frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{1-x^2}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}-2\cdot\frac{1}{n}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}(\cos nx)\right)$$

$$=\frac{8}{n^2\pi}\left([x\cos nx]_0^{\pi}-\frac{1}{n}[\sin nx]_0^{\pi}\right)=(-1)^n\frac{8}{n^2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

又 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}2x^2\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}\pi^2$，所以由 $f(x)$ 的连续性，知

$$f(x)=\frac{2}{3}\pi^2+8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\quad x\in[0,\pi].$$

## 12.3.8　总习题十二选讲

2．判定下列级数的收敛性：

（2）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$；

**解**：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1,$$

而调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较审敛法知，级数发散.

（3）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$；

**解**：因为

$$\frac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}<\frac{n}{2^n},\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sqrt[n]{n}=\frac{1}{2}<1$$

所以由根值审敛法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 收敛；由比较审敛法，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\dfrac{n\pi}{3}}{2^n}$ 收敛.

（4）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^{10}n}$；

**解**：因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln^{10}n}=\infty,$$

而调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较审敛法知，原级数发散.

提示：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^{10}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{10\ln^9x\cdot\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{10}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^9x}=\cdots=\frac{1}{10!}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{10!}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\dfrac{1}{x}}=\infty$

（5）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^s}\ (a>0,\ s>0)$.

**解**：因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^s}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{(\sqrt[n]{n})^s}=a,$$

故由根值审敛法知，当 $a<1$ 时级数收敛，当 $a>1$ 时级数发散.

当 $a=1$ 时，原级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，这是 $p=s$ 的 $p$–级数，当 $s>1$ 时级数收敛，当 $s\leqslant 1$ 时级数发散.

3．设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 与收敛.

**证明**：因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$.

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n^2+2u_nv_n}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+2v_n)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n^2}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$，

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n^2+2u_nv_n)$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(u_n^2+2u_nv_n)+v_n^2]=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$$

也是收敛的.

5．讨论下列级数的绝对收敛性与条件收敛性：

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$；

**解**：因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\ln e=1$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由比较审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}\right|$ 发散，即原级数不是绝对收敛的.

另一方面，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\frac{n+1}{n}$ 是交错级数，且满足莱布尼茨定理的条件，所以该级数收敛，从而原级数条件收敛.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$.

**解**：令 $u_n=(-1)^n\frac{(n+1)!}{n^{n+1}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\frac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}<1,$$

故由比值审敛法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(-1)^n\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}|$ 收敛，从而原级数绝对收敛.

6．求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$；

**解**：显然 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k^2}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 的前 $n$ 项部分和.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\dfrac{\mathrm{e}}{3}<1$，所以由根值审敛法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ 收敛，从而部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛.

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot s_n=0$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$.

**解**：$2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\cdots+\frac{n}{3^n}}$.

显然 $s_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\cdots+\dfrac{n}{3^n}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$ 的前 $n$ 项部分和.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $S(x)=\left[\int_0^x S(x)\mathrm{d}x\right]'=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\right]'=\left[\dfrac{1}{1-x}-1\right]'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{3}S\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{3}{4}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{3}{4}$，从而

$$\lim_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdot 8^{\frac{1}{27}}\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]=\lim_{n\to\infty}2^{s_n}=2^{\frac{3}{4}}.$$

7．求下列幂级数的收敛域：

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}x^n$；

**解**：$u_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}|x|=\mathrm{e}|x|$，由根值审敛法，当 $\mathrm{e}|x|<1$，即 $-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，幂级数收敛；当 $\mathrm{e}|x|>1$，时幂级数发散.

当 $x=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$；

当 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$.

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{1}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\neq0,$$

因此级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$均发散，从而收敛域为$\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},\ \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

（3）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(x+1)^n$；

**解：**$u_n=n(x+1)^n$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}|x+1|=|x+1|,$$

根据比值审敛法，当$|x+1|<1$，即$-2<x<0$时，幂级数收敛；当$|x+1|>1$时，幂级数发散.

又当$x=0$时，幂级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，是发散的；当$x=-2$时，幂级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，也是发散的，所以幂级数的收敛域为$(-2, 0)$.

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^{2n}$.

**解：**$u_n=\frac{n}{2^n}x^{2n}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}\cdot x^2=\frac{1}{2}x^2,$$

根据比值审敛法，当$\frac{1}{2}x^2<1$，即$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$时，幂级数收敛；当$\frac{1}{2}x^2>1$时，幂级数发散.

又当$x=\pm\sqrt{2}$时，幂级数成为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，是发散的，所以收敛域为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

8．求下列幂级数的和函数：

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}$；

**解：**设幂级数的和函数为$S(x)$，则

$$S(x)=\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\quad(x^2<1).$$

因为当$x=\pm1$时，幂级数收敛，所以有

$$S(x)=\arctan x\ (-1\leqslant x\leqslant1).$$

（3）$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$；

**解：** 设幂级数的和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n=(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^{n-1}=(x-1)\left[\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^n\right]'$$

$$=(x-1)\left[(x-1)\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1}\right]'=(x-1)\left[\frac{x-1}{1-(x-1)}\right]'=\frac{x-1}{(2-x)^2}\quad(|x-1|<1),$$

即

$$S(x)=\frac{x-1}{(2-x)^2}\quad(0<x<2).$$

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

**解：** 易知幂级数的收敛域为[−1, 1].

设幂级数的和函数为 $S(x)$，则当 $x\neq 0$ 时

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\int_0^x\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}[x\ln(1-x)-x-\ln(1-x)]$$

$$=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x),\ x\in[-1,0)\cup(0,1],$$

又显然 $S(0)=0$，因此

$$S(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x) & x\in[-1,\ 0)\cup(0,\ 1]\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

9．求下列数项级数的和：

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}$；

**解：** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)+n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}$.

因为 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$，两边求导得 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n-1}$，再求导得 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n=x^2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x,$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}=S(1)=2\mathrm{e}\,.$$

（2）$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+1}{(2n+1)!}$.

**解：**
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\cos 1+\frac{1}{2}\sin 1\,.$$

提示：
$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\,,\quad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}x^{2n}\,.$$

10．将下列函数展开成 $x$ 的幂级数：

（1）$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；

**解：**
$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=\int_0^x[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x\,,$$

因为
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\ ,\ |x|\leqslant 1,$$

故
$$\ln(x+\sqrt{x^2+1})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}\ (-1\leqslant x\leqslant 1).$$

11．设 $f(x)$是周期为 $2\pi$ 的函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为
$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-\pi,\ 0)\\ \mathrm{e}^x & x\in[0,\ \pi)\end{cases}.$$

将 $f(x)$展开成傅里叶级数.

**解：**
$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi},$$
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{\pi}-n^2a_n\,,$$

即
$$a_n=\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}\ (n=1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=(-n)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=-na_n\ (n=1,2,\cdots).$$

因此
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-1}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathrm{e}^{\pi}-1}{(n^2+1)\pi}(\cos nx-n\sin x)$$
$$(-\infty<x<+\infty\text{且 }x\neq n\pi,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

12．将函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant h\\ 0 & h<x\leqslant \pi\end{cases}$$

分别展开成正弦级数和余弦级数.

**解**：若将函数进行奇延拓，则傅里叶系数为

$$a_n=0(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos nh)}{n\pi}.$$

因此，函数展开成正弦级数为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos nh}{n}\sin nx,\ x\in(0,h)\cup(h,\pi),$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=\frac{1}{2}$.

若将函数进行偶延拓，则傅里叶系数为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2\sin nh}{n\pi}\ (n=1,2,\cdots),$$

$$b_n=0(n=1,2,\cdots),$$

因此，函数展开成余弦级数为

$$f(x)=\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx,\ x\in[0,h)\cup(h,\pi),$$

当 $x=h$ 时，$f(h)=\frac{1}{2}$.

# 参 考 文 献


[1] 同济大学应用数学系. 高等数学（第六版）. 北京：高等教育出版社，2007

[2] 同济大学应用数学系. 高等数学习题全解指南. 北京：高等教育出版社，2007

[3] 蒋福民，徐建平. 高等数学习题课教程. 上海：同济大学出版社，2004

[4] 王卫群，胡铁城等. 高等数学习题课教程. 北京：清华大学出版社，2009

[5] 齐民友. 微积分学习指导. 武汉：武汉大学出版社，2004

[6] 彭斯俊. 高等数学习题课教程. 武汉：武汉理工大学出版社，2003

[7] 林益，刘国钧. 微积分（经管类）. 武汉：武汉理工大学出版社，2006

[8] 姚志扬，马军，尤正书. 高等数学. 武汉：华中师范大学出版社，2006

[9] 李永乐，李正元等. 考研数学复习全书. 北京：国家行政学院出版社，2009

[10] 李正元，李永乐，袁萌棠. 数学复习全书（数学一）. 北京：国家行政学院出版社，2011

[11] 陈文登. 考研数学十年真题点评. 北京：北京理工大学出版社，2012

[12] 张天德. 考研数学历年真题点评. 天津：天津科学技术出版社，2012

[13] 潘正义. 考研数学第一视频. 北京：世界图书出版公司，2010

举报电话：（010）88254396；（010）88258888
传　　真：（010）88254397
E-mail：　dbqq@phei.com.cn
通信地址：北京市海淀区万寿路 173 信箱
　　　　　电子工业出版社总编办公室
邮　　编：100036